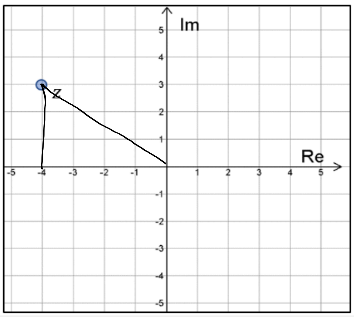
1. (med räknare)

Figuren nedan visar ett komplext talplan med talet z markerat.
Skriv talet z på *polär form med en decimal.* (2/0/0)



Två lösningstänk
1) "Manuellt"
2) Via miniräknarens färdiga verktyg

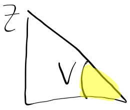
1) "Manuellt"

För polär form krävs $|z|$ och $\arg z$

$|z|$ fås via Pyth. sats:

$$|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$\arg z$ fås t.ex via att beräkna vinkeln v



$$v = \tan^{-1}\frac{3}{4} \approx 36{,}9^\circ$$

och utnyttja att

$$\arg z + v = 180 \Rightarrow$$

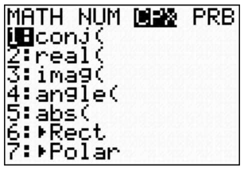
$$\arg z = 180 - v \approx 143{,}1^\circ$$

$$\Rightarrow z = (5;\ 143{,}1^\circ)$$

2) Via miniräknarens färdiga verktyg.

Alla dessa finns under

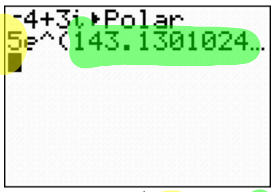
MATH → CPX



I detta fall är det

7: ▸Polar som gäller:

Skriv in z på formen $a + bi$, dvs $-4 + 3i$ och tryck "▸Polar":



$$\Rightarrow z = (5;\ 143{,}1^\circ)$$

OBS! $(5;\ 143{,}1^\circ)$ kan skrivas

$$5 \cdot (\cos 143{,}1^\circ + i \cdot \sin 143{,}1^\circ)$$

2. (utan räknare) Lös ekvationen $z^3 - 27i = 0$ (0/3/0)

$z^3 - 27i = 0 \Rightarrow z^3 = 27i$

För att lösa ekv. av typen

$z^n = \text{Siffra}$. Skriv om båda leden på polär form

$z = (r, v)$

$27i = (27, 90°)$

$z^3 = 27i \Leftrightarrow (r, v)^3 = (27, 90°)$

$(r^3, 3v) = (27, 90°)$

Jmf nu avstånden och vinklarna var för sig $\Rightarrow$

$r^3 = 27$ $3v = 90°$

$r = \sqrt[3]{27} = 3$ $v = 30°$

$z_1 = (3, 30°)$

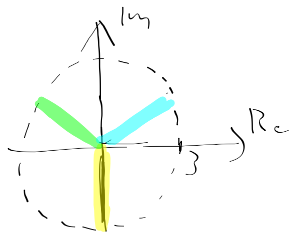
Övriga 2 lösningar fås genom att lägga till $\alpha = \frac{360°}{\text{exponenten}} = \frac{360°}{3} = 120°$

$\Rightarrow$

$z_1 = (3, 30°)$ $+120°$

$z_2 = (3, 150°)$ $+120°$

$z_3 = (3, 270°)$



3. (utan räknare) Lös ekvationen $\bar{z} + 3z - iz = 9$ (1/2/0)

Utgå från ett allmänt z skrivet på a+bi-form, $z = a+bi$ Då gäller $\bar{z} = a - bi$

$$\bar{z} + 3z - iz = 9$$

$$a - bi + 3(a+bi) - i(a+bi) = 9$$

$$a - bi + 3a + 3bi - ai - bi^2 = 9$$

[$i^2 = -1$]

$$a - bi + 3a + 3bi - ai + b = 9$$

[Stuva om till Realdel och Imdel var för sig]

$$(4a + b) + (2b - a)\cdot i = 9 + 0i$$

[Jämför HL och VL, båda vad gäller Re och Im]

Re: $4a + b = 9$

Im: $2b - a = 0$

$a = 2b$

$$8b + b = 9$$
$$9b = 9$$
$$b = 1$$

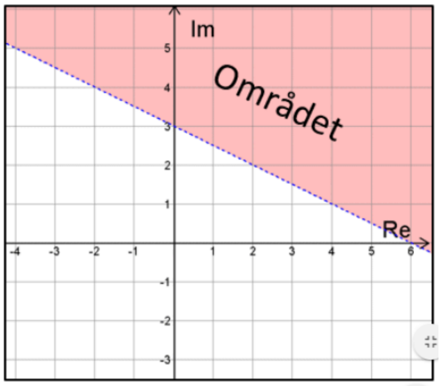
$a = 2b = 2$

$\Longrightarrow$ z som löser ekv är

$$z = 2 + 1\cdot i$$

4.
(utan räknare)

I figuren till höger visas ett område i ett komplext talplan.
Området består av de komplexa talen z
Skriv ett samband som beskriver talen i området



Svar: $\text{Im } z > -0{,}5 \cdot \text{Re } z + 3$ (0/1/0)

Tänk "y" och "x" istället för Im och Re och uttryck linjen på formen $y = kx + m \Rightarrow$

$$y = -0{,}5 \cdot x + 3$$

Byt nu tillbaka: $x =$ "Re z"
$y =$ "Im z"

$$\text{Im } z = -0{,}5 \cdot \text{Re } z + 3$$

Återstår bara att se hur området förhåller sig till linjen

Området ligger över linjen och linjen är ej med

$\Rightarrow$ "$>$"

5. För talet z gäller $z = \sqrt{3} + i$.
(utan räknare)

Beräkna z^5. *Svara exakt på formen $a + bi$* (0/2/1)

Strategi: Använd tabellen på formelbladet för att skriva om z till polär form.
Utför sedan upphöjt till 5 i polär form och använd tabellen igen för att skriva tillbaka svaret till formen $a+bi$

$$z = \sqrt{3} + i = \left[\begin{array}{l} |z| = \sqrt{3+1} = 2 \\ v = \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} = 30^\circ \end{array}\right]$$

Vinkel v (grader) (radianer)	0° 0	30° $\frac{\pi}{6}$	45° $\frac{\pi}{4}$	60° $\frac{\pi}{3}$	90° $\frac{\pi}{2}$	120° $\frac{2\pi}{3}$	135° $\frac{3\pi}{4}$	150° $\frac{5\pi}{6}$	180° π
$\sin v$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos v$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan v$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Ej def.	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

$$= (2, 30^\circ)$$

$$z^5 = (2, 30^\circ)^5 = (32, 150^\circ)$$

$$(32, 150^\circ) = 32 \cdot (\cos 150^\circ + i \cdot \sin 150^\circ)$$

$$= \left[\begin{array}{l} \sin 150^\circ = \frac{1}{2} \\ \cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right] =$$

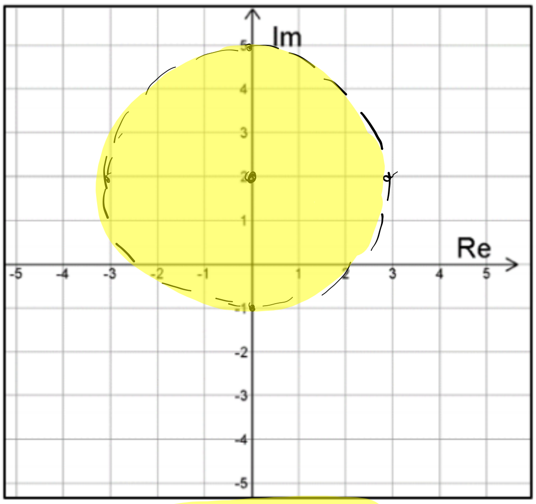
Vinkel v (grader) (radianer)	0° 0	30° $\frac{\pi}{6}$	45° $\frac{\pi}{4}$	60° $\frac{\pi}{3}$	90° $\frac{\pi}{2}$	120° $\frac{2\pi}{3}$	135° $\frac{3\pi}{4}$	150° $\frac{5\pi}{6}$	180° π
$\sin v$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos v$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan v$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Ej def.	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

$$= 32\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot i\right) = -16\sqrt{3} + 16i$$

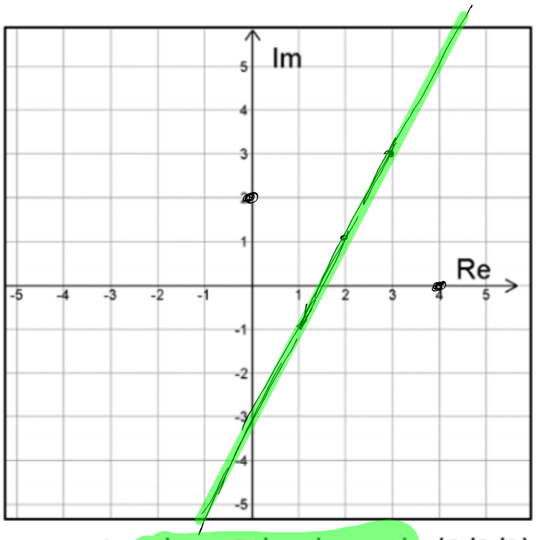
$$z^5 = -16\sqrt{3} + 16i$$

6.
(utan räknare)

Markera i de komplexa talplanen områdena som beskrivs nedanför.
Endast svar krävs!



a) $|z - 2i| < 3$ (0/2/0)



b) $|z - 2i| = |z - 4|$ (0/0/2)

"Alla punkter med ett avstånd som är mindre än 3 till punkten (2i) ⇒ en fylld och streckad cirkel med centrum i (0, 2) och radie 3.

Alla punkter som har samma avstånd till 2i och 4 "en sned förstärkningslinje mittemellan"

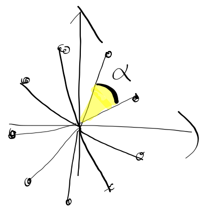
7. (utan räknare)

För den komplexa ekvationen $z^9 = w$ gäller att en lösning är $z_1 = \left(3, \frac{\pi}{5}\right)$. Ange ytterligare en lösning till samma ekvation.

Svar: ex $z = \left(3, \frac{19\pi}{45}\right)$ (0/0/1)

För ekv av typen $z^n = q$ gäller att lösningarna är symmetriskt fördelade med vinkeln mellan 2 lösningar som α där $\alpha = \frac{\text{Helt varv}}{\text{Antal lösningar}}$ I detta fall

$\alpha = \frac{2\pi}{9}$



$\Rightarrow$ En ny lösning fås alltid mha en given genom att utgå från samma avstånd och lägga till α

$$\Rightarrow \quad z_1 = \left(3, \frac{\pi}{5}\right) + \frac{2\pi}{9}$$

$$z_2 = \left(3, \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{9}\right) =$$

$$= \left(3, \frac{9\pi}{45} + \frac{10\pi}{45}\right) =$$

$$= \left(3, \frac{19\pi}{45}\right)$$

Även $z = \left(3, \frac{\pi}{5} - \frac{2\pi}{9}\right) = \left(3, -\frac{\pi}{45}\right)$

skulle gå lika bra, eller någon av alla 9:

$$\left(3, \frac{9\pi}{45}\right), \left(3, \frac{19\pi}{45}\right), \left(3, \frac{29\pi}{45}\right),$$

$$\left(3, \frac{39\pi}{45}\right), \left(3, \frac{49\pi}{45}\right), \left(3, \frac{59\pi}{45}\right)$$

$$\left(3, \frac{69\pi}{45}\right), \left(3, \frac{79\pi}{45}\right), \left(3, \frac{89\pi}{45}\right)$$