Matematik 4 – Några repetitionsuppgifter

Trigonometriska formler samt derivatan av sin och cos

1. Bestäm exakt värde på

a) $\sin(300°)$ (1/0/0)

300° ligger i fjärde kvadranten. Sinus är därför negativt.

$$\sin(300°) = -\sin(60°) = [Formelbladets\ tabell] = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

b) $\tan(225°)$ (0/1/0)

$\tan(225°) = \frac{\sin(225°)}{\cos(225°)}$ 225° ligger i tredje kvadranten. Både sin och cos är negativa.

$$\sin(225°) = -\sin(45°) = [Formelbladets\ tabell] = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos(225°) = -\cos(45°) = [Formelbladets\ tabell] = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan(225°) = \frac{-\frac{1}{\sqrt{2}}}{-\frac{1}{\sqrt{2}}} = 1$$

2. Derivera funktionerna

a) $\sin(3x)$ (1/0/0)

Derivatan av sin är cos.

Gångra med inre derivatan (dvs siffran 3) => $3 \cdot \cos(3x)$

b) $4\cos(8x)$ (1/0/0)

Derivatan av cos är $-sin$.

Gångra med inre derivatan (dvs siffran 8) => $-4 \cdot 8 \cdot \sin(8x) = -32\sin(8x)$

c) $\cos^2(x) - \sin^2(x)$ (0/1/0)

Skriv först om med dubbla vinkeln för cos. $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x)$

Derivatan av cos är -sin. Gångra med inre derivatan (dvs siffran 2) => $-2\sin(2x)$

3. Visa att $(\sin(x) + \cos(x))^2 = 1 + \sin(2x)$ (2/0/0)

Använd kvadreringsregeln på vänstra sidan, dvs $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. I detta fall fås då:
$\sin^2 x + 2 \cdot sinx \cdot cosx + \cos^2 x$. Detta uttryck består av två delar:
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ (enligt trig. Ettan)
$2sinxcosx = \sin(2x)$ (enligt dubbla vinkeln för sinus).
Då dessa läggs ihop fås således $1 + \sin(2x)$ vilket är det högra ledet

4. För en viss vinkel, v, i andra kvadranten gäller att
$\cos(v) = -\frac{2}{5}$

a) Bestäm ett exakt värde på $\sin(v)$ (2/0/0)

Trig. Ettan ger:

$$\sin(v) = \sqrt{1 - \left(-\frac{2}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{25} - \frac{4}{25}} = \sqrt{\frac{21}{25}} = \frac{\sqrt{21}}{5}$$

I andra kvadranten är sinus positivt, så svaret blir : $\sin(v) = +\frac{\sqrt{21}}{5}$

b) Bestäm ett exakt värde på $\sin(2v)$ (0/1/0)

Dubbla vinkeln för sinus,

$\sin(2v) = 2 \cdot \sin(v) \cdot \cos(v)$

Med svaret i a) fås: $\sin(2v) = 2 \cdot \frac{\sqrt{21}}{5} \cdot \frac{-2}{5} = -\frac{4\sqrt{21}}{25}$

5. Visa att

$$\sin(x + 30°) - \cos(x + 60°) = \sqrt{3}\sin(x)$$ (0/2/0)

Additionsformeln för sin: $\sin(x + 30°) = \sin(x) \cdot \cos(30°) + \sin(30°) \cdot \cos(x)$

Additionsformeln för cos: $\cos(x + 60°) = \cos(x) \cdot \cos(60°) - \sin(60°) \cdot \sin(x)$

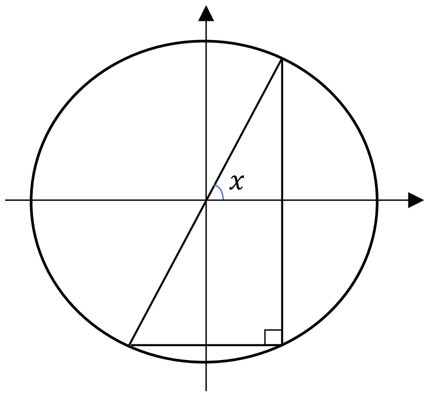
Formelbladets tabell: $\sin(30°) = \frac{1}{2}$ $\cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\sin(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos(60°) = \frac{1}{2}$

$$\sin(x) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \cos(x) - \left(\cos(x) \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin(x)\right) = [\cos x\ tar\ ut\ varandra] = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x) = \sqrt{3}\sin(x)$$

6. Figuren visar en rätvinklig triangel med sina tre hörn på enhetscirkelns rand.

Triangeln kommer att få olika utseende beroende på vad vinkeln x är.

Triangelns area ges av funktionen $A(x)$



Bestäm en **primitiv funktion** till $A(x)$ (0/2/0)

Arean ges av basen gånger höjden / 2. Basen är $2\cos(x)$ och $2\sin(x)$.

Arean blir då $A(x) = 2\sin(x) \cdot \cos(x)$ vilket kan skrivas om med dubbla vinkeln till $A(x) = \sin(2x)$

Primitiv till sin är -cos. Med inre derivatan (dvs siffran 2) blir då primitiv funktion : $-\frac{\cos(2x)}{2}$

7. Bestäm värdet av $\cos(105°)$.
Svara exakt! (0/2/0)

Börja med att skriva om 105 med hjälp av siffrorna i formelbladet. T.ex: $\cos(105°) = \cos(45° + 60°)$
Additionsformeln för cos blir då $\cos(45°) \cdot \cos(60°) - \sin(60°) \cdot \sin(45°)$
Formelbladets tabell: $\sin(45°) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\cos(45°) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\sin(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos(60°) = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = [Gångra\ bråken] = \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = [Skriv\ på\ samma\ bråkstreck] = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

8. För en viss vinkel, x, gäller att $\sin^2(3x) + \sin(2x) + \cos^2(3x) = \frac{1}{5}$

Bestäm ett exakt värde på $\sin(4x)$ (0/2/1)

$\sin^2(3x) + \cos^2(3x) = 1$ (enligt trig. Ettan)

Det gör att ekvationen kan skrivas: $\sin(2x) + 1 = \frac{1}{5}$

Flytta över 1:an till andra sidan. $\sin(2x) = -\frac{4}{5}$

4x motsvarar dubbla vinkeln till $2x$.

Då krävs både ett sin- och ett cos-värde.

Cos värdet fås via trig. Ettan. => $\cos(2x) = \sqrt{1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{25} - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$

I detta fall kan cos-värdet vara både positivt och negativt. $\cos(2x) = \pm\frac{3}{5}$

$\sin(4x) = 2 \cdot \sin(2x) \cdot \cos(2x) = 2 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \left(\pm\frac{3}{5}\right) = \pm\frac{24}{25}$