FACIT Uppgifter till sammanfattningen – kapitel 4 – Komplexa tal

Uppgift 1:
Egenskaper hos komplexa tal

Para ihop talen I - V med punkterna A - H i det komplexa talplanet.

Observera att det är fler punkter än tal, så det blir punkter över

I $z_1 = 3 - 3i$ = H

II $z_2 = 3i$ = B

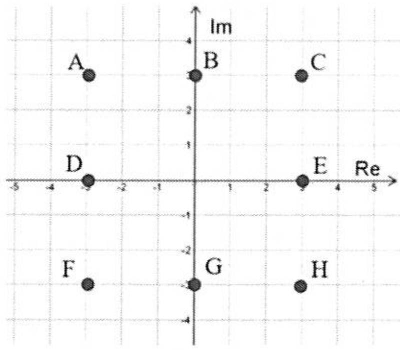
III $z_3 = \overline{z_2}$ = G

IV $z_4 = |z_2|$ = 3 = E

V $z_5 = \text{Im}\,\overline{z_1}$

$= \text{Im}(3+3i)$

$= 3 = E$



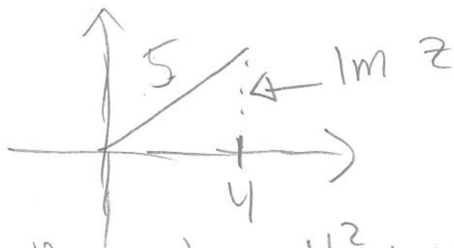
Uppgift 2:
Olika skrivsätt för samma tal

För talet *z* gäller att

Re *z* = 4

|*z*| = 5

Im *z* > *0*



Ange *z* på...

$z = 4 + 3i$ ← a) rektangulär form ($a + bi$)

$z = (5;\ 36{,}9°)$ ← b) polär form

(Miniräknaren: MATH → CPX → ▸Polar)

Vinkeln fås via trig.

Pyth. sats: $4^2 + y^2 = 5^2$

$y = \sqrt{25-16} = 3$

$z = 4 + 3i$

$\tan v = \frac{3}{4} \Rightarrow v = 36{,}9°$

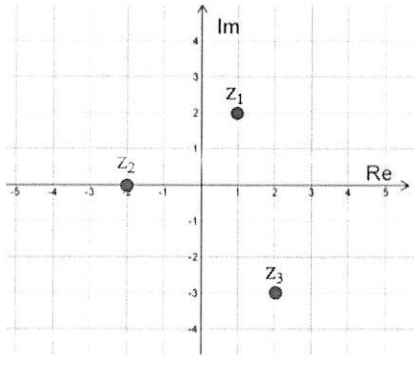
Uppgift 3:
Addition och subtraktion

I det komplexa talplanet nedan finns tre tal markerade. Bestäm $z_1 + z_2 - \overline{z_3}$

$z_1 = 1 + 2i$

$z_2 = -2$

$z_3 = 2 - 3i$



$z_1 + z_2 - \overline{z_3} =$

$= 1 + 2i + (-2) - (2 + 3i) = -3 - i$

Uppgift 4:
Multiplikation och division

För talen z_1 och z_2 gäller:

$z_1 = 2 + i$

$\frac{z_2}{z_1} = 3 + 2i$

a) Bestäm z_2

b) Bestäm kvoten $\frac{z_1}{z_2}$

a) $z_2 = (3+2i)\cdot z_1 = (3+2i)\cdot(2+i)$

$= 6+3i+4i+2i^2 =$

$= 4+7i$

b) $\frac{2+i}{4+7i} = \frac{(2+i)(4-7i)}{(4+7i)\cdot(4-7i)} = \frac{8-14i+4i-7i^2}{16+49} = \frac{15-10i}{65} = \frac{3}{13}-\frac{2}{13}i$

Uppgift 5:
Multiplikation och division

Nedanstående figur visar ett komplext talplan med ett antal mittpunktscirklar med heltalsradier och strålar utgående från origo.

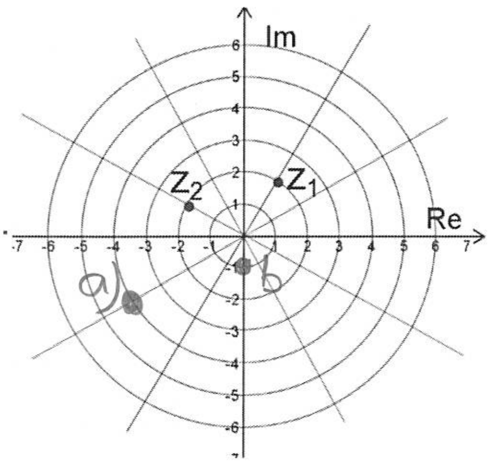
I figuren finns talen z_1 och z_2 markerade.

Mellan varje stråle är det 30° vinkel

Markera i figuren talen...

a) $a = z_1 z_2$

b) $b = \frac{z_1}{z_2}$



$z_1 = (2, 60°)$

$z_2 = (2, 150°)$

$a = (4, 210°)$

$b = (1, -90°)$

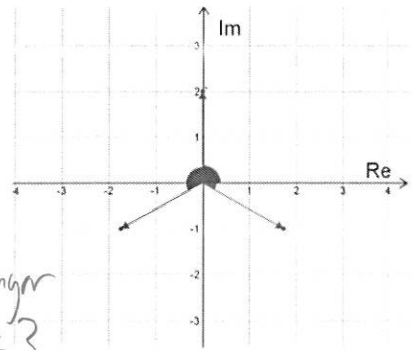
Uppgift 6:
Ekvationer av typen $z^n = w$

a) Lös ekvationen $z^4 = 2i$
Svara på polär eller rektangulär form

a) Skriv om $2i$ på polär form: $(2, 90°)$

b) Nedanstående figur visar lösningarna till ekvationen $z^n = w$.

Ange z och w



a) $z^4 = (2, 90°)$

$z_1 = (\sqrt[4]{2}; 22{,}5°)$

$\alpha = \frac{360}{4} = 90°$

$z_2 = (\sqrt[4]{2}; 112{,}5°)$ α

$z_3 = (\sqrt[4]{2}; 200{,}5°)$ α

$z_4 = (\sqrt[4]{2}; 290{,}5°)$

b) 3 lösningar $\Rightarrow n = 3$

Utgå från en lösning, t.ex $(2, 90°)$ och höj upp med 3

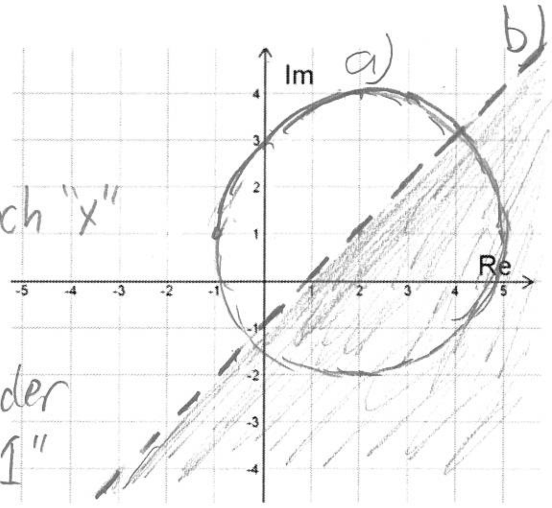
$(2, 90°)^3 = (8, 270°) = -8i$

Uppgift 7:
Områden i det komplexa talplanet

Ange i det komplexa talplanet de punkter z som uppfyller...

a) $|z + 2 - i| = 3$

b) *Im z < Re z - 1*



a) Skriv om på formen $|z-(\quad)| = \ldots$

$|z-(2+i)| = 3$

"En cirkel med radie 3 och medelpunkt $(2+i)$"

b) Tänk "y" och "x"

$y < x - 1$

"Alla tal under linjen $x - 1$"

Uppgift 8:
Faktorsatsen och algebrans fundamentalsats

Polly löser ekvationen $x^3 - 7x^2 + 16x - 10 = 0$

Hon får lösningarna
$x_1 = 1$, $x_2 = 4 - i$, $x_3 = -2$.

Nomi tittar på lösningarna och säger att Polly måste ha räknat fel.

a) Förklara hur Nomi visste att lösningarna var fel utan att kontrollräkna.

b) Lösningen $x = 1$ är rätt. Använd den för att hjälpa Polly lösa ekvationen rätt.

a) Finns det komplexa lösningar finns dessa alltid i konjugerade par, dvs om $x_2 = 4 - i$ är en lösning måste också $x = 4 + i$ vara en lösning.

b) Utför divisionen:

$$
\begin{array}{l}
\quad x^2 - 6x + 10 \\
\hline
x^3 - 7x^2 + 16x - 10 \quad \underline{|\,x-1} \\
-(x^3 - 1x^2) \\
\hline
0 - 6x^2 + 16x - 10 \\
\quad -(-6x^2 + 6x) \\
\hline
\quad\quad 0 + 10x - 10 \\
\quad\quad\quad \underline{10x - 10} \\
\quad\quad\quad\quad 0
\end{array}
$$

Lös därefter "Kvoten = 0"

$x^2 - 6x + 10 = 0$

$x = 3 \pm \sqrt{9 - 10}$

$= 3 \pm \sqrt{-1} = 3 \pm i$