

18. Bestäm kvoten $\frac{7+i}{3-i}$. Svara på formen $a + bi$

(2/0/0)

$$\frac{7+i}{3-i} = \frac{(7+i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{21 + 10i + i^2}{9 - i^2} = \left[i^2 = -1 \right] = \frac{20 + 10i}{10} = 2 + 1i$$

Förklary med
nämnares konjugat

19. Visa att $(\sin(x) + \cos(x))^2 = \sin(2x) + 1$

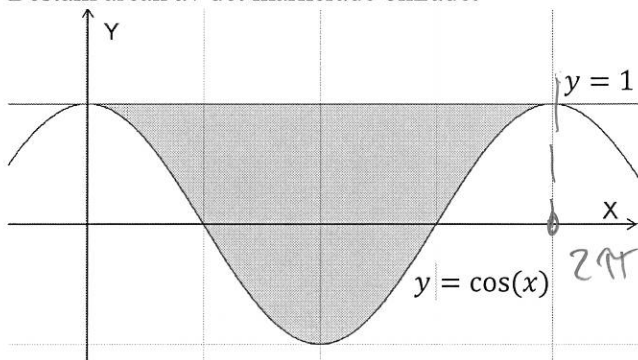
(2/0/0)

$$\begin{aligned} VL &= (\sin(x) + \cos(x))^2 = \left[\begin{array}{l} \text{Kvadrerings-} \\ \text{regeln} \end{array} \right] = \sin^2(x) + 2\sin(x) \cdot \cos(x) + \cos^2(x) = \\ &= \left[\text{Tring ettan} \right] = 1 + 2\sin(x) \cdot \cos(x) = \left[\begin{array}{l} \text{Dubbla} \\ \text{vinkeln} \end{array} \right] = \\ &= 1 + \sin(2x) = HL \end{aligned}$$

20. Figuren nedan visar ett område som begränsas av graferna till $y = \cos(x)$, där x anges i radianer, och $y = 1$.

Bestäm arean av det markerade området

(2/0/0)



$$P = 2\pi$$

$$A = \int_0^{2\pi} (1 - \cos(x)) dx = \left[x - \sin(x) \right]_0^{2\pi}$$

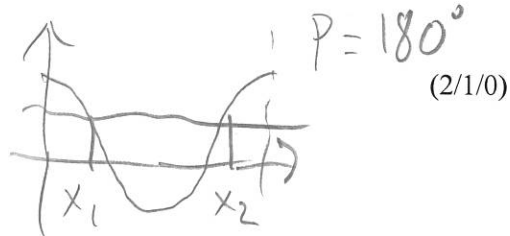
$$= (2\pi - \sin(2\pi)) - (0 - \sin(0)) = 2\pi$$

(Det går också se direkt via pusselbitstänk)

21. Lös ekvationen $\cos(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$(2x) = 30^\circ$$

$$x_1 = 15^\circ$$



$$x_2 = P - x_1 = 180^\circ - 15^\circ = 165^\circ$$

Alla lösningar:

$$x = 15^\circ + n \cdot 180^\circ$$

$$x = 165^\circ + n \cdot 180^\circ$$

22. Bestäm koordinaterna för det största värdet till funktionen $y = xe^{-0,1x}$ (1/2/0)

"Största värdet" $\Rightarrow y' = 0$

$$y' = 1 \cdot e^{-0,1x} + x \cdot (-0,1 e^{-0,1x})$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Bryt ut} \\ e^{-0,1x} \end{array} \right] = e^{-0,1x} (1 - 0,1x)$$

$$y' = 0 \Rightarrow 1 - 0,1x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{0,1} = 10$$

$$\text{Största värdet} = y(10) = 10e^{-0,1 \cdot 10} = 10e^{-1}$$

23. Ekvationen $z^3 - 5z^2 + 12z - 8 = 0$ är given

a) Visa att $z = 1$ är en rot till ekvationen (1/0/0)

Om $z = 1$ är en rot ska VL = HL om $z = 1$

$$VL = 1^3 - 5 \cdot 1^2 + 12 \cdot 1 - 8 = 0 = HL$$

$$z = 1$$

b) Bestäm ekvationens övriga rötter. (0/2/0)

$z = 1 \Rightarrow (z - 1)$ en faktor \Rightarrow Division med $(z - 1)$ ska gå jämnt ut

$$z^2 - 4z + 8$$

$$\begin{array}{r} z^3 - 5z^2 + 12z - 8 \\ \underline{-(z^3 - z^2)} \\ 0 \end{array} \quad \boxed{z-1}$$

$$\begin{array}{r} 0 \quad -4z^2 + 12z - 8 \\ \underline{-(-4z^2 + 4z)} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0 \quad 8z - 8 \\ \underline{-(8z - 8)} \\ 0 \end{array}$$

$$z^2 - 4z + 8 = 0$$

$$z = 2 \pm \sqrt{4 - 8}$$

$$= 2 \pm \sqrt{-4}$$

$$\boxed{= 2 \pm 2i}$$

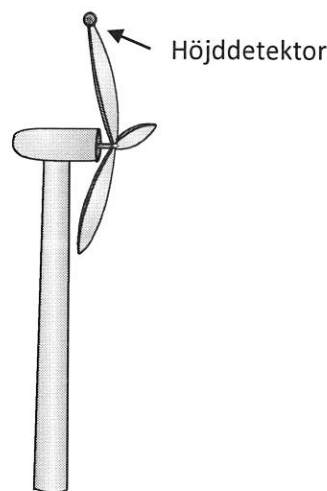
24. Ett visst vindkraftverk har består av 3 rotorblad. Dessa är placerade i toppen av ett högt torn.

En höjddetektor placeras längst ut på ett av rotorbladen.

Se figuren till höger.

Under rotationen registrerar höjddetektorn en höjd över marken, y meter efter t sekunder som kan anpassas till modellen

$$y = 105 - 45\cos\left(\frac{\pi(t-3)}{6}\right)$$



- a) Vad innebär siffrorna 105 och 45 i modellen?

(2/0/0)

105 är vindkraftverkets höjd \Rightarrow 105 m
45 är rotorbladets längd \Rightarrow 45 m

- b) Hur lång tid tar ett varv enligt modellen?

(1/1/0)

Siffran framför $t = k = \frac{2\pi}{\text{Perioden}}$

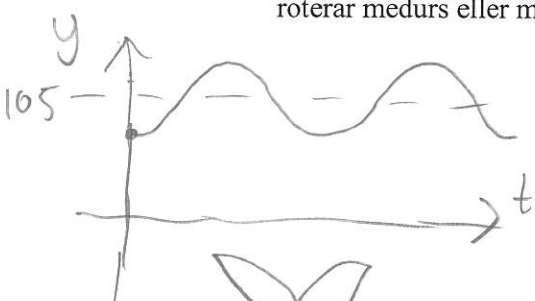
$$\frac{\pi(t-3)}{6} = \left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot t - \frac{3\pi}{6} \quad \swarrow \quad k = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{Perioden} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}} = \frac{2\pi}{1} \cdot \frac{6}{\pi} = 12 \text{ s}$$

(Långsamt...)

- c) Undersök om det går att avgöra om vindkraftverket roterar medurs eller moturs

(0/1/1)



Detektorn började längst ned men det enda som går att utläsa är att höjden ökade, ej riktning.

Höjden ökar lika mycket åt både hållen

25. För en vinkel i första kvadranten gäller att $\sin(v) = \frac{1}{4}$.

Bestäm ett exakt värde på $\sin(v + 30^\circ)$

(0/3/0)

$$\sin(v + 30^\circ) = \sin v \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cos v =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \sin v = \frac{1}{4} \Rightarrow \\ \cos(v) \text{ förs med} \\ \text{trig. ettan} \\ \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} \end{array} \right] = \frac{1}{4} \cdot \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cdot \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$= \left[\begin{array}{l} \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \\ \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right] \text{ enl. formelboken} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{3} + \sqrt{15}}{8}$$

26. Lös ekvationen $z^5 = 32i$

(0/3/0)

Skriv om $32i$ på

polär form

$$32i = (32, 90^\circ)$$

$$z^5 = (32, 90^\circ) \quad z = (r, \nu)$$

$$(r^5, 5 \cdot \nu) = (32, 90^\circ)$$

$$r^5 = 32 \Rightarrow r = 2$$

$$5 \cdot \nu = 90^\circ \Rightarrow \nu = \frac{90}{5} = 18^\circ$$

Första lösningen:

$$z_1 = (2, 18^\circ)$$

Vinkeln mellan = $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$

$$z_2 = (2, 90^\circ)$$

$$z_3 = (2, 162^\circ)$$

$$z_4 = (2, 234^\circ)$$

$$z_5 = (2, 306^\circ)$$

27. Visa att $e^{\sin x \cos x} \leq \sqrt{e}$ för alla x

(0/0/2)

$$\uparrow \sqrt{e} = e^{0,5}$$

Vill visa

$$\sin x \cdot \cos x \leq 0,5 \text{ för alla } x$$

VL = [Dubbla vinkeln för sin]

$$= \frac{\sin(2x)}{2} = 0,5 \sin(2x)$$

$$\uparrow A = 0,5$$

$$0,5 \sin(2x) \leq 0,5 \text{ för alla } x$$

vsv.



28. Hitta alla lösningar till ekvationen nedan, om x anges i grader.

(0/1/2)

$$2 \cdot \frac{(\sin(2x))^2}{\cos(2x)} = \sqrt{3} \cdot \tan(2x)$$

Skriv om så att HL = 0 $\Rightarrow 2 \cdot \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)} \cdot \sin(2x) - \sqrt{3} \tan(2x) = 0$

$$\frac{\sin(2x)}{\cos(2x)} = \tan(2x) \Rightarrow 2 \cdot \tan(2x) \cdot \sin(2x) - \sqrt{3} \tan(2x) = 0$$

$$\text{Bryt ut } \tan(2x) \Rightarrow \tan(2x)(2\sin(2x) - \sqrt{3}) = 0$$

Lös med nollprod.

$$\tan(2x) = 0 \quad P = 90^\circ$$

$$\sin(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Alla lösningar från $\sin(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$2x_1 = 0$$

$$P = 180^\circ \quad 2x_1 = 60^\circ$$

$$x_1 = 30^\circ$$

$$x_1 = 0$$

$$\boxed{x = 0 + n \cdot 90^\circ}$$

$$x_2 = \frac{P}{2} - x_1 = 90 - 30 = 60^\circ$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 30^\circ + n \cdot 180^\circ \\ x &= 60^\circ + n \cdot 180^\circ \end{aligned}}$$

29. För talet z gäller att $z = 2 + 2\sqrt{3}i$.

Bestäm z^5 . Svara exakt på formen $a + bi$

(0/1/2)

Skriv z på polär form:

$$z = 2 + 2\sqrt{3}i = 4\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \left[\begin{array}{l} \text{Formelblad:} \\ \nu = 60^\circ \end{array} \right]$$

\uparrow \uparrow
 $\cos(\nu)$ $\sin(\nu)$

$$z = (4, 60^\circ)$$

$$z^5 = (4^5, 300^\circ) = 4^5 (\cos 300^\circ + i \sin 300^\circ) = \left[\begin{array}{l} \text{Diagram} \\ \cos 300^\circ = 0,5 \\ \sin 300^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right]$$
$$= 4^5 \cdot \left(\frac{1}{2} + i - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{4^5}{2} - \frac{4^5 \cdot \sqrt{3}}{2}i$$

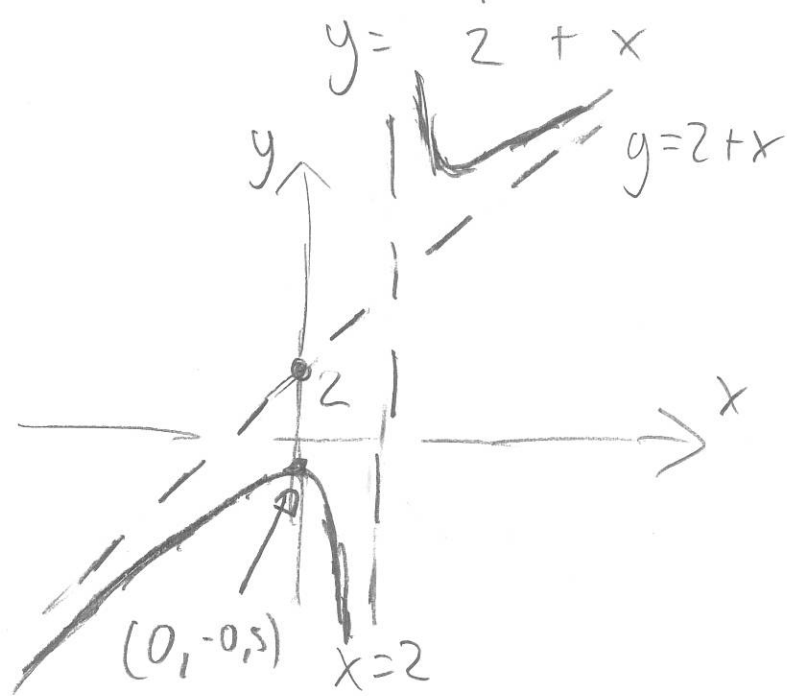
30. Skissa grafen till funktionen $y = \frac{2x+1}{x-2} + x$

(0/1/2)

Asymptoter: $x-2=0 \Rightarrow x=2$

$$\frac{2x+1}{x-2} + x$$

$$\Rightarrow y = 2 + x \quad (\text{sned asymptot})$$



Undersök en punkt, t.ex. där $x=0$

$$\frac{2 \cdot 0 + 1}{0 - 2} + 0 = \frac{1}{-2} = -0,5$$

$(0, -0,5)$ på grafen
 \Rightarrow under den sneda asymptoten.