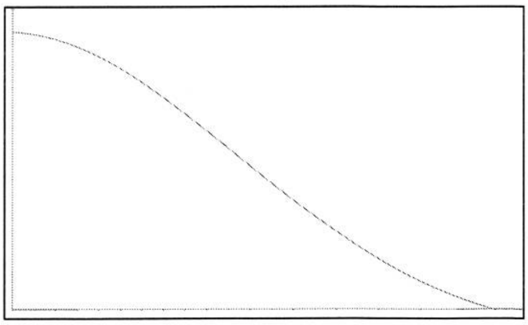
Del D – Med miniräknare – Redovisning krävs! FACIT

17. Bilden till höger visar profilen hos en stor skidbacke.

Profilen ges av den matematiska modellen,

$H(x) = 1{,}5e^{-0{,}12x^2} - 0{,}03x$

Där H är höjden av backen i km
och x är utsträckningen i horisontell led, i km.

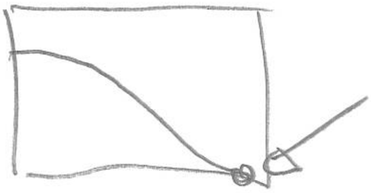


a) Bestäm och tolka $H'(2)$
Svara med 3 decimaler! (2/0/0)

$H'(2) = -0{,}476$ 2 km in på backen lutar backen nedåt med $-0{,}476$ km/km

b) Backen slutar när $H = 0$. Bestäm vilken utsträckning backen har.
Svara med 3 decimaler! (1/0/0)

Xmin = 0
Xmax = 5
Ymin = 0
Ymax = 2



Intersect
$x = 4{,}483$ km

c) Det finns en punkt på backen där lutningen är $-0{,}1$ km i höjdled/km i horisontell led
Ange höjden på denna punkt.
Svara med 3 decimaler! (0/2/0)

Rita funktionen och derivatan:

Ymin = -1
Ymax = 2

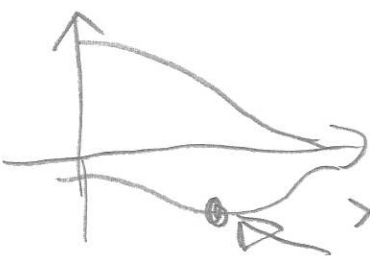
Rita in Y3 = -0,1 och intersect med derivatan

intersect: $x = 0{,}195 \rightarrow H(0{,}195) = 1{,}487$ km

d) Bestäm var någonstans på backen där backen är som *brantast*.
Svara med såväl höjd som placering i horisontell led.
Svara med 3 decimaler! (0/2/0)

"Brantast" ⇒ Lutningen är som störst/minst ("störst neg")

Använd minimum på derivatan!



$x = 2{,}041 \rightarrow$ Stega upp till Höjden!

2,041 km in är höjden 0,849 km

18. I en sjö kastas en sten. Då bildas cirkulära vattenvågor som rör sig ut från nedslagsplatsen med hastigheten 1,5 m/s.

Vid ett visst tillfälle ökar arean hos en sådan cirkel med $40\,m^2/s$

Hur lång tid har det då gått sedan nedslaget? (0/3/0)

Arean av en cikel: $A = \pi \cdot r^2$

Derivera: $A' = \pi \cdot 2 \cdot r \cdot r'$

"ökar med 1,5m/s"

$\Rightarrow r' = 1{,}5$ och $r = 1{,}5 \cdot t$

$A' = \pi \cdot 2 \cdot 1{,}5 \cdot t \cdot 1{,}5$

$\Rightarrow t = \dfrac{A'}{4{,}5\pi} = \left[A' = 40\,m^2/s \right]$

$= \underline{2{,}83\text{ s}}$

19. För funktionen f gäller att $f'(x) = 4\sin(3x)$ och en tangent med tangeringspunkt i $x = \frac{\pi}{2}$ har ekvationen $y = -4x + \pi$

Bestäm funktionsuttrycket för $f(x)$ (0/2/0)

Om $f'(x) = 4\sin(3x)$ är

$f(x) = \dfrac{-4\cos(3x)}{3} + C$ för ngt C

Tangent

$x = \frac{\pi}{2}$ $\quad y = -4x + \pi$ $\quad \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = y\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$= -4 \cdot \frac{\pi}{2} + \pi = -\pi$

$\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$

$\dfrac{-4 \cdot \cos\left(3 \cdot \frac{\pi}{2}\right)}{3} + C = -\pi$

$C = -\pi$

$\Rightarrow f(x) = \dfrac{-4\cos\left(3\frac{\pi}{2}\right)}{3} \cancel{+} \pi$

20. Nedanstående uppgift är ifrån ett gammalt NP. Lös uppgiften.

Temperaturen y °C i ett hus, under ett dygn, kan beskrivas av funktionen

$$y(t) = 20 + 3 \cdot \sin\frac{\pi(t-8)}{12}$$

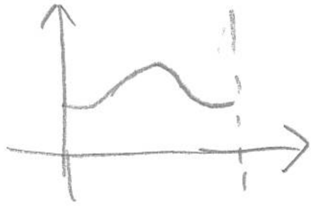
där t är tiden i timmar och där $t = 0$ motsvarar midnatt.

a) Mellan vilka värden varierar temperaturen i huset?

Endast svar fordras (1/0)

b) Vid vilken tidpunkt på dygnet ökar temperaturen som mest och med vilken hastighet sker detta? (0/3)

Rita ut ett dygn $(0<t<24)$



a) Maximum: 23,0°C

Minimum: 17,0°C

b) Rita derivatan:

$Y_{min} = -2$

$Y_{max} = 2$ $\Rightarrow$

Ökar mest $\Rightarrow$ Derivatan som mest positiv $\Rightarrow$ Maximum

$X = 8$

$Y = 0{,}785$

dvs efter 8 h ökning med 0,785°C/h

21. Nedanstående uppgift är ifrån ett gammalt NP. Lös uppgiften.

En funktion f har andraderivatan $f''(x) = \cos 2x$. Funktionen har en extrempunkt med koordinaterna $\left(\frac{\pi}{2}, -1\right)$

a) Avgör om den givna extrempunkten är en maximi- eller minimipunkt. (1/0)

b) Bestäm funktionen f. (0/2)

a) $f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\pi) = -1$

$f'' < 0 \Rightarrow$ Maximum.

b) $f'(x) = \frac{\sin(2x)}{2} + C$

$f(x) = -\frac{\cos(2x)}{4} + Cx + D$

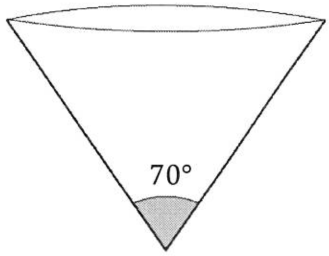
(Enklast är att låta $C = 0$)

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$ $\quad -\frac{\cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right)}{4} + D = -1 \Rightarrow \frac{1}{4} + D = -1$

$D = -\frac{5}{4}$

$\boxed{f(x) = -\frac{\cos(2x)}{4} - \frac{5}{4}}$ (t.ex)

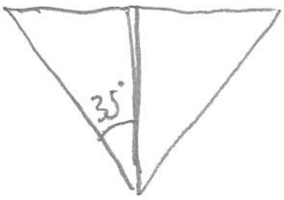
22. Figuren till höger visar en kon med ett litet hål i bottnen.



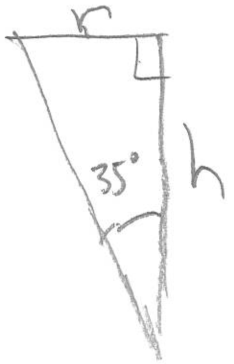
I konen hälls 2 dm^3 vatten. Detta vatten börjar då rinna ut med konstant hastighet.

När det återstår 1 dm^3 vatten minskar ~~vattenhöjden~~ radien med 0,01 dm/s.

Hur lång tid har det totalt tagit innan konen är tom? (0/1/3)



Börja med att hitta ett samband mellan höjd och radie



Trig. ger

$$\tan(35°) = \frac{r}{h}$$

$$\Rightarrow h = \frac{r}{\tan(35°)}$$

Volymen av en kon: $V = \frac{\pi r^2 \cdot h}{3} =$

$$= \left[h = \frac{r}{\tan(35°)} \right] = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \frac{r}{\tan(35°)}}{3} = \frac{\pi r^3}{3\tan(35°)}$$

Derivera: $V' = \frac{\pi}{\cancel{3} \cdot \tan(35°)} \cdot \cancel{3} \cdot r^2 \cdot r'$

$V = 1\,\mathrm{dm}^3 \Rightarrow$

$$V = \frac{\pi \cdot r^3}{3\tan(35°)} = 1 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{3\tan(35°)}{\pi}}$$

$$= 0{,}8744$$

$$V' = \frac{\pi}{\cancel{3} \cdot \tan(35°)} \cdot \cancel{3} \cdot 0{,}8744^2 \cdot 0{,}01 = \underline{0{,}034\,\mathrm{dm}^3/\mathrm{s}}$$

Varje sekund minskar volymen med 0,034 dm^3/s

Tid att tömma 2 dm^3

$$t = \frac{2}{0{,}034} = 58{,}3\,\mathrm{s}$$