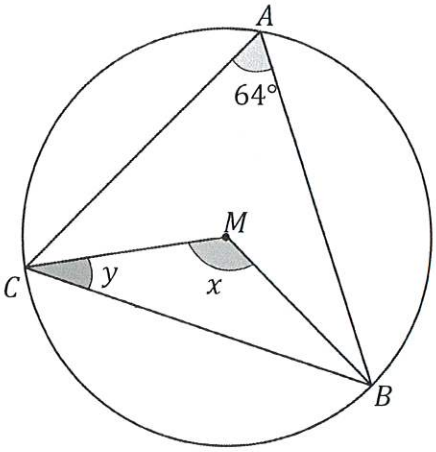
FACIT

Del 2 – Utan digitalt hjälpmedel! Fullständiga uträkningar krävs!

19. Figuren visar en cirkel med en triangel, ABC, inskriven så att alla dess hörn ligger på cirkelns rand. Punkten M är cirkelns medelpunkt.



Bestäm vinklarna x och y (2/0/0)

x är mittvinkel till randvinkeln 64° $\Rightarrow$

$x = 2 \cdot 64 \Rightarrow x = 128°$

y är en basvinkel i den likbenta triangeln

$\Rightarrow 2y + 128° = 180$

$2y = 52° \Rightarrow y = 26°$

20. Ett företag tillverkar tråd som de sätter upp på trådrullar.

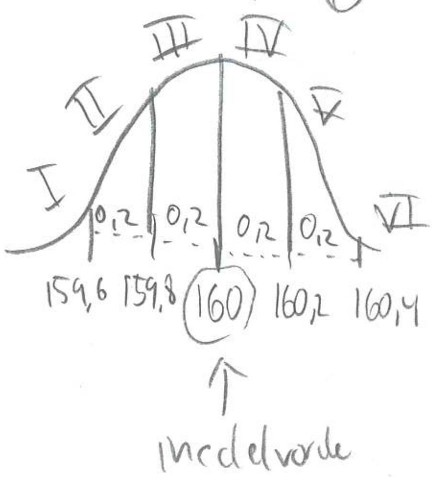
Längden på en trådrulle är normalfördelad med medelvärdet 160 meter, och standardavvikelsen 20 cm.

Av 10000 tillverkade trådrullar, hur många väntas ha en längd mellan 159,6 meter och 160,2 meter? (2/0/0)

Normalfördelning $\Rightarrow$

Dela in i 6 fack och fyll i värdena

$\Rightarrow$



Mellan 159,6 och 160,2

$\Rightarrow$ Fack II, III, IV

$\Rightarrow$ [Formelbladet]

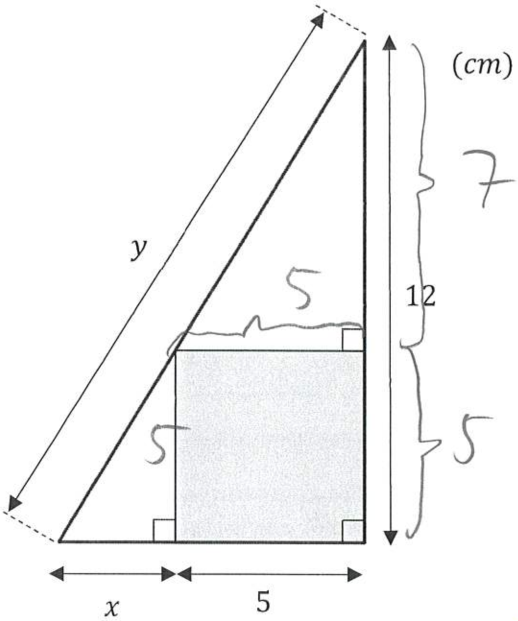
$= 13,6 + 34,1 + 34,1 = 81,8\%$

$\Rightarrow 81,8\%$ av 10000

$= 8180$ st

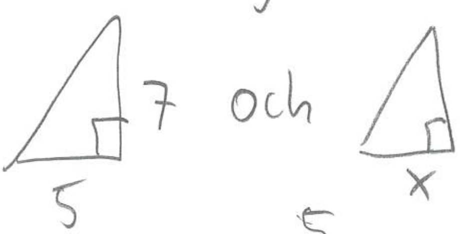
21. Figuren visar en rätvinklig triangel med höjden 12 cm med en inritad kvadrat.

Kvadratens sida är 5 cm.



a) Bestäm sträckan x.
Svara exakt! (2/0/0)

Likformighet mellan

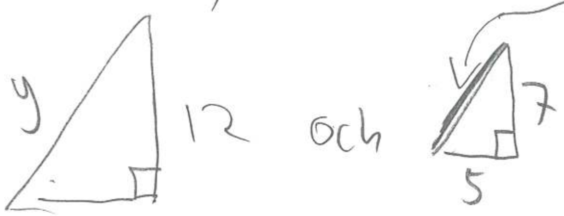


$\Rightarrow \frac{\text{"liten"}}{\text{STOR}}$

$$\Rightarrow \frac{5}{7} = \frac{x}{5} \; [\text{korsvis mult}] \Rightarrow 25 = 7x \Rightarrow x = \frac{25}{7}$$

b) Bestäm sträckan y.
Svara exakt! (0/1/0)

Likformighet mellan



Fås med pyth. sats:

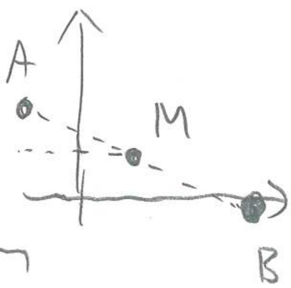
$$7^2 + 5^2 = hyp^2 \Rightarrow hyp = \sqrt{74}$$

$$\frac{y}{\sqrt{74}} = \frac{12}{7} \Rightarrow y = \frac{12\sqrt{74}}{7}$$

22. Bestäm avståndet mellan punkterna A och B om $A = (-3, 6)$ och punkten som ligger **mitt emellan** A och B har koordinaterna $M = (2,3)$.

Svara exakt! (1/1/0)

Skiss av info:



Uppgiften kan lösas på två sätt:

* Ta reda på B och sedan avst. mellan A och B

ELLER

* Bestäm avståndet mellan A och M och sedan dubbla svaret.

$$AM = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34} \Rightarrow AB = 2 \cdot \sqrt{34}$$

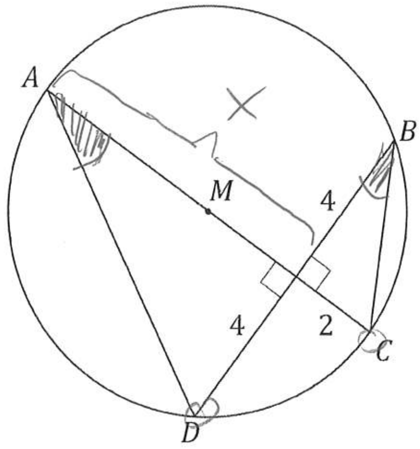
$$B = (7, 0)$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{10^2 + 6^2} =$$

$$AB = \sqrt{136}$$

Samma sak

23. Figuren visar en cirkel och två rätvinkliga trianglar.
Punkterna A, B, C, D ligger alla på cirkelns rand.
Sträckan AC är cirkelns diameter.
Punkten M är cirkelns medelpunkt.



a) Bestäm cirkelns radie. (2/0/0)

Kordasatsen: $x \cdot 2 = 4 \cdot 4$
$\Rightarrow x = 8$

$\Rightarrow$ Diametern $= x + 2 = 10$

$\Rightarrow$ Radien $= 5$

b) Joel påstår att de två trianglarna i figuren är *likformiga*.

Kan också visas av att kvoten mellan sidorna stämmer.

Har Joel rätt?
Motivera ditt svar! (0/1/0)

Likformiga $\Rightarrow$ Samma vinklar. Båda har en 90°, och en randvinkel från punkterna C och D. Dessa är lika stora enl. randvinkelsatsen
$\Rightarrow$ Trianglarna har samma vinklar $\Rightarrow$ Likformiga

Ja, Joel har rätt.

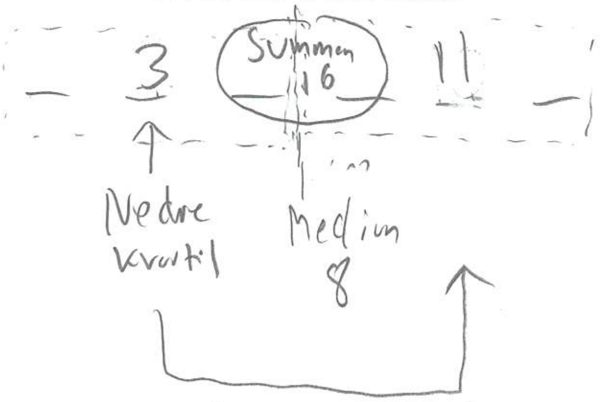
24. För 6 heltal gäller att

Variationsbredden är 16

Medianen, medelvärdet och kvartilavståndet är samtliga 8

Nedre kvartil är ~~6~~. 3

Bestäm det största av de 6 talen. (1/2/0)



Minsta talet: x
Största talet: $x + 16$ (pga var. bredd 16)

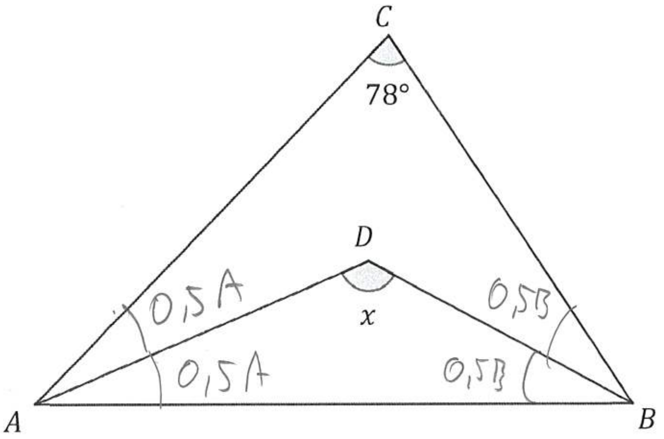
Medelvärdet $= 8 \Rightarrow$ Summan $= 48$

Kvartilavstånd $= 8 \Rightarrow$ övre kvartil $= 11$

$x + 3 + 16 + 11 + x + 16 = 48$
$2x = 48 - 46 = 2 \Rightarrow x = 1$

Största talet 17

25. Figuren visar en triangel ABC med två **bisektriser**, AD och BD inritade.



a) Mattias tittar på figuren och säger

På formelbladet står att $u = 2v$. *Då måste ju vinkel* x *var dubbelt så stor som* 78°*! Alltså är* $x = 156°$

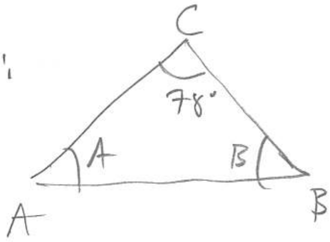
Mattias har tyvärr fel. Förklara varför. (1/0/0)

Mattias hänvisar till randvinkelsatsen.
Den gäller randvinklar i cirklar och hur randvinkeln och mittvinkeln hänger ihop.
dvs om det vore:

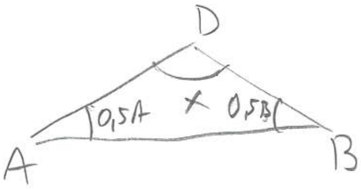
skulle mittvinkeln blivit 156°

b) Bestäm det rätta värdet på vinkel x. (0/2/0)

I figuren finns två trianglar:



och



För båda dessa gäller att vinkelsumman = 180°

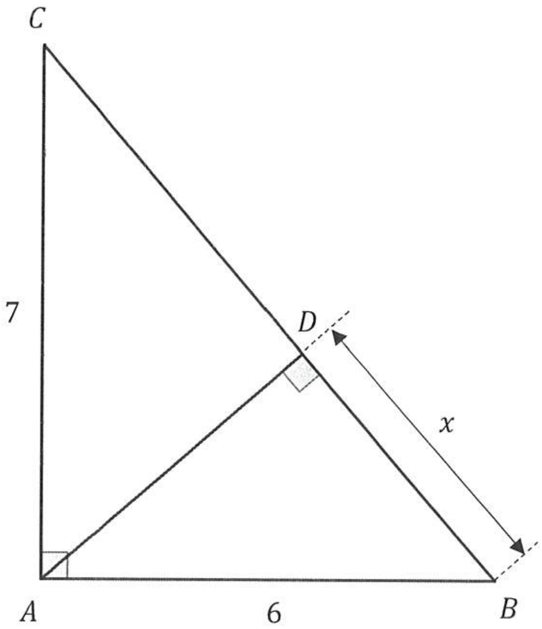
Då AD och BD är bisektriser gäller att de delar resp. vinkel A och B i hälften:

$\Rightarrow$ Stor triangel: $A+B+78° = 180 \Rightarrow A+B = 102°$

Liten triangel: $0,5A + 0,5B + x = 180$ $[\cdot 2]$ $\Downarrow$

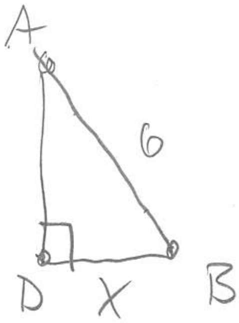
$A+B+2x = 360 \Rightarrow 102 + 2x = 360° \rightarrow x = 129°$

26. Figuren visar den rätvinkliga triangeln ABC med triangeln ABD inskriven.



Visa att $x = \dfrac{36}{\sqrt{85}}$ (0/3/0)

Plockas triangel ABD ut och vrids till fås



Triangel ABD är likformig med ABC då de delar två vinklar (90° och B)

Likformigheten ger:

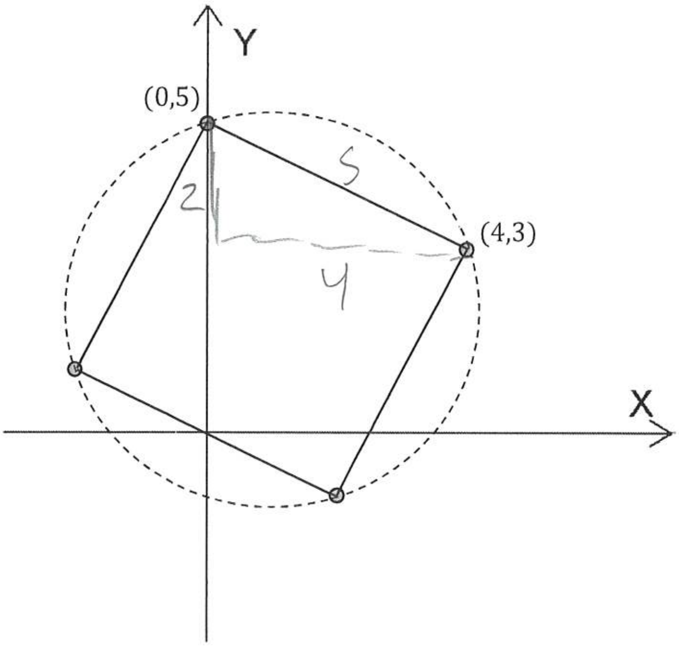
"liten"/STOR: $\dfrac{X}{6} = \dfrac{6}{BC}$

BC ges av Pyth. sats:
$7^2 + 6^2 = BC^2 \Rightarrow BC = \sqrt{85}$

$\dfrac{X}{6} = \dfrac{6}{\sqrt{85}}$ korsvis mult. $\Rightarrow \sqrt{85}\,x = 36$

$x = \dfrac{36}{\sqrt{85}}$ vsv.

27. Figuren visar ett koordinatsystem med en cirkel i vilken en kvadrat skrivits in så att kvadratens hörn ligger på cirkelns rand.



Cirkelns radie kan skrivas på formen $r = \sqrt{a}$ där a är ett heltal.

Bestäm värdet av konstanten a.

Svara exakt! (0/1/2)

Kvadratens sida motsvarar avståndet mellan $(0,5)$ och $(4,3) \Rightarrow s = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$

Cirkelns diameter motsvarar hypotenusan i triangeln:

$d^2 = (\sqrt{20})^2 + (\sqrt{20})^2$

$\Rightarrow d = \sqrt{40}$

Radien är halva diametern, dvs $r = \frac{d}{2}$

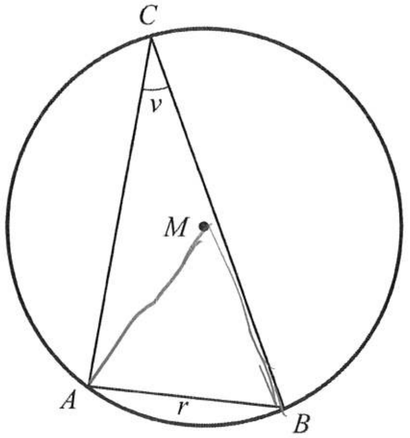
$r = \frac{d}{2} = \frac{\sqrt{40}}{2} = \frac{\sqrt{4 \cdot 10}}{2} = \frac{\sqrt{4} \cdot \sqrt{10}}{2} = \frac{\cancel{2} \cdot \sqrt{10}}{\cancel{2}}$

$= \sqrt{10} \Rightarrow a = 10$

28. Uppgiften nedan är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften. (0/0/1)

Triangeln ABC har sina hörn på en cirkel med medelpunkten M och radien r cm.
Sidan AB är r cm.

Bestäm vinkeln v.

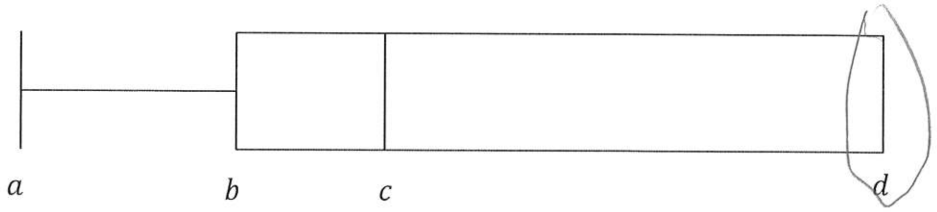


Dras radierna AM och BM fås en triangel som är likbent.

Eftersom även $AB = r$ är triangel ABM inte bara likbent utan liksidig $\Rightarrow$ alla vinklar är $60°$.

v är en randvinkel till A och B med mittvinkeln $60°$ $\Rightarrow$ $v = \frac{60}{2}$ $\Rightarrow$ $v = 30°$

29. Nedan visas ett lådagram baserat på endast fem tal.



Största värde och övre kvartil är samma värde.

Ange de fem talen i storleksordning uttryckt i a, b, c och d. (0/1/1)

Lådagrammet visar: Minsta tal $= a$
Nedre kvartil $= b$
Median $= c$
Övre kvartil $= d$
Största värde $= d$

De fem talen: a x c d d

b d

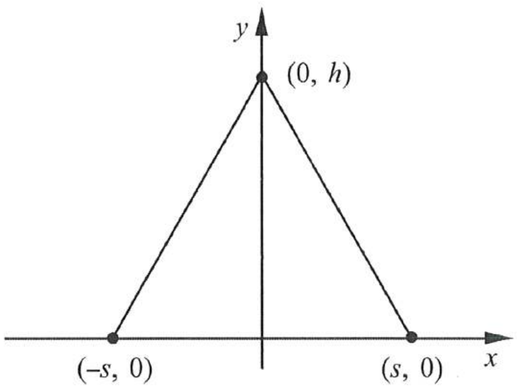
Om kvartilen är d och ena sidan d är andra sidan d

För talet x gäller: $\frac{a+x}{2} = b \Rightarrow x = 2b - a$

Talen blir: $a, 2b-a, c, d, d$

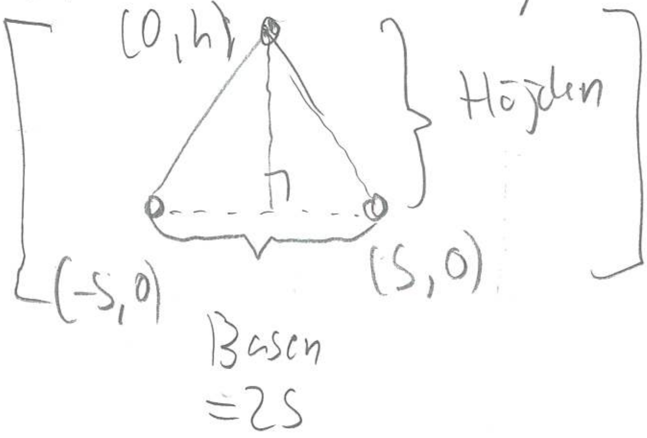
30. Uppgiften nedan är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften. (0/0/2)

En liksidig triangel är ritad i ett koordinatsystem. Den har sina hörn i punkterna $(0,\ h), (-s,\ 0)$ och $(s,\ 0)$



Bestäm den liksidiga triangelns area A uttryckt endast i s.

Arean av triangeln ges av $\frac{\text{Basen} \cdot \text{Höjden}}{2}$



$$= \frac{2s \cdot h}{2} = s \cdot h$$

Om man tittar på en av de två rätvinkliga trianglarna gäller:

Pyth. sats:

$$s^2 + h^2 = (2s)^2 = 4s^2$$

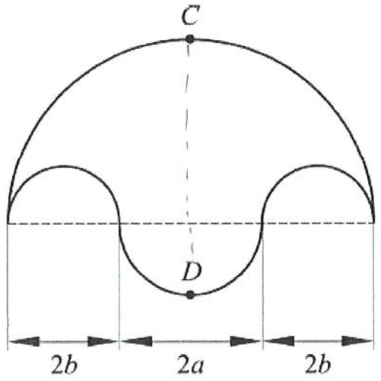
$$\Rightarrow h^2 = 4s^2 - s^2 = 3s^2$$

$$h = \sqrt{3s^2} = \sqrt{3} \cdot s$$

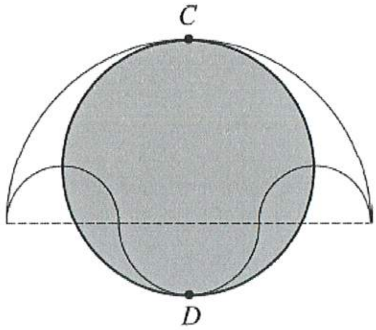
Arean blir: $A = s \cdot h = [h = \sqrt{3} \cdot s] = \sqrt{3}\, s^2$

31. Uppgiften nedan är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften (0/0/3)

Arkimedes är en av tidernas största matematiker och levde för två tusen år sedan. I en arabisk samling av Thabit ibn Currah finns det geometriska satser som med stor sannolikhet bevisats av Arkimedes. Figurerna nedan åskådliggör en sådan matematisk sats.



Figur 1



Figur 2

Figur 1 visar ett område som begränsas av fyra halvcirklar. Den grå cirkeln i figur 2 har diametern CD.

Visa att arean av den grå cirkeln i figur 2 är lika stor som arean av området i figur 1.

Diametern på den stora halvcirkeln $= 4b + 2a \Rightarrow$

Radien $= 2b + a$. $CD =$ Radie $+ a = 2b + 2a$

Diametern hos den grå cirkeln motsvarar CD

$\Rightarrow$ Arean av den grå cirkeln $= \pi \cdot r^2 = \pi \cdot \left(\frac{CD}{2}\right)^2$

$= \pi \cdot (a+b)^2 = \pi \cdot (a^2 + 2ab + b^2)$

Arean av området i figur 1 =

$$= \frac{\pi \cdot (2b+a)^2}{2} - 2 \cdot \frac{\pi \cdot b^2}{2} + \frac{\pi \cdot a^2}{2} = \left[\text{Bryt ut } \pi\right]$$

$$= \pi\left(\frac{(2b+a)^2}{2} - b^2 + \frac{a^2}{2}\right) = \pi\left(\frac{4b^2 + 4ab + a^2}{2} - b^2 + \frac{a^2}{2}\right)$$

$$= \pi\left(2b^2 + 2ab + \frac{a^2}{2} - b^2 + \frac{a^2}{2}\right) = \pi\left(a^2 + 2ab + b^2\right)$$ VSV