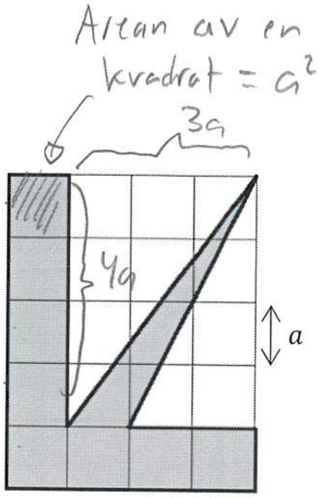
FACIT

Geometri och algebra

MED digitala hjälpmedel

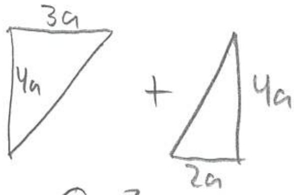
D1. I ett område med 20 kvadrater med sidan a har ett grönt område markerats.



a) Visa att det gröna områdets *area* utgör hälften av det totala området (1/2/0)

Det totala området $= 20 \cdot a^2$

Den vita delen =

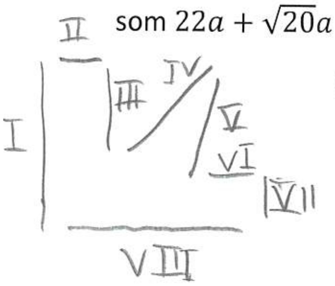


$$= \frac{3a \cdot 4a}{2} + \frac{2a \cdot 4a}{2} = 6a^2 + 4a^2 = 10a^2$$

Det vita $= 10a^2$
Det gröna $= 10a^2$

$$\Rightarrow \frac{\text{Grönt}}{\text{Totalt}} = \frac{10a^2}{20a^2} = 0{,}5$$

b) Visa att det gröna områdets *omkrets* kan skrivas som $22a + \sqrt{20}a$ (1/2/0)



Omkretsen består av åtta delar (I – VIII). Två av dessa (IV och V) utgörs av hypotenusor i rätvinkliga trianglar!

$I = 5a$
$II = 1a$
$III = 4a$

IV: Pyth. sats: $(3a)^2 + (4a)^2 = (IV)^2$
$\Rightarrow IV = \sqrt{25a^2} = 5a$

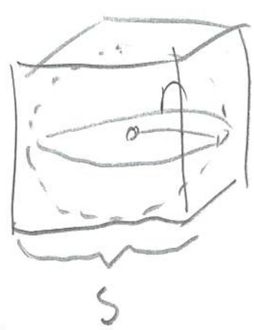
V: Pyth. sats: $(4a)^2 + (2a)^2 = (V)^2 \Rightarrow V = \sqrt{20a^2} = \sqrt{20}a$

$VI = 2a$ $VII = 1a$ $VIII = 4a$

Totalt:
$5a + 1a + 4a + 5a + \sqrt{20}a + 2a + 1a + 4a = 22a + \sqrt{20}a$

D2. Ett klot läggs inuti en kub.
Kubens sida är lika lång som klotets diameter.

Visa att förhållandet mellan klotets och kubens volymer kan skrivas $\frac{\pi}{6}$ (0/2/1)



Formelbladet: $V_{kub} = s^3$

$V_{klot} = \frac{4\pi r^3}{3}$

Om klotets diameter = kubens sida gäller:

$s = 2r \Rightarrow V_{kub} = (2r)^3 = 8r^3$

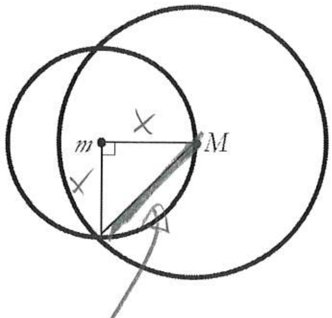
Förhållandet mellan ⇒ Divisionen mellan ⇒ V_{klot} / V_{kub}

stryk r^3

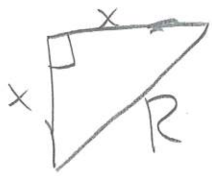
$$\frac{V_{klot}}{V_{kub}} = \frac{\frac{4\pi r^3}{3}}{\frac{8r^3}{1}} = \left[\text{Div. mellan 2 bråk}\right] = \frac{4\pi r^3}{3} \cdot \frac{1}{8r^3} = \frac{4\pi}{24} = \frac{\pi}{6}$$

D3. Uppgiften nedan är från ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften. (0/2/2)

Visa att den stora cirkeln har dubbelt så stor area som den lilla cirkeln. M är mittpunkten i den stora cirkeln och m är mittpunkten i den lilla cirkeln.



Om radien hos lilla cirkeln är x gäller:



$\Rightarrow$ Pyth. sats:

$$x^2 + x^2 = R^2$$

$$2x^2 = R^2$$

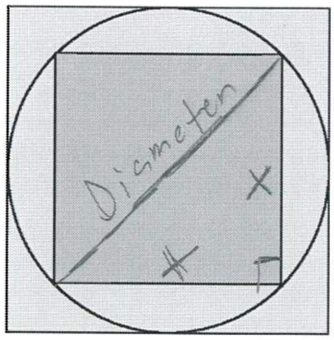
OBS! Detta motsvarar radien hos stora cirkeln

Arean hos lilla $= \pi \cdot x^2$

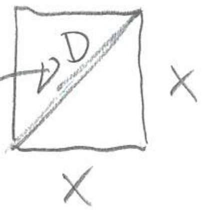
Arean hos stora $= \pi \cdot R^2 = \pi \cdot 2x^2$

$$\frac{A_{stor}}{A_{liten}} = \frac{\pi \cdot 2x^2}{\pi x^2} = \left[\begin{array}{l}\text{Förkorta bort} \\ \pi \text{ och } x^2\end{array}\right] = 2$$ VSV.

D4. Figuren visar en cirkel som är inskriven i en kvadrat.
Inuti cirkeln finns en mindre kvadrat.
Visa att den större kvadratens area är dubbelt så stor som den mindres. (0/2/1)



Om sidan hos den mindre kvadraten är x gäller:



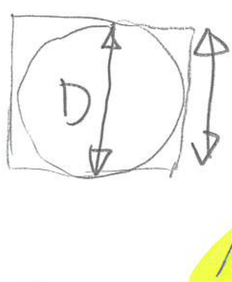
Detta motsvarar Diametern hos cirkeln

Pyth. sats:

$$x^2 + x^2 = D^2 \Rightarrow$$

$$D^2 = 2x^2$$

Diametern hos cirkeln är också sidan hos den större kvadraten:



$\Rightarrow S = D$

$A_{liten} = x^2$

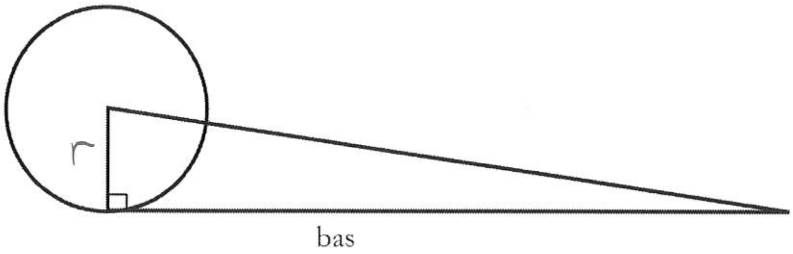
$A_{stor} = S^2 = D^2 = 2x^2$

$$\frac{A_{stor}}{A_{liten}} = \frac{2x^2}{x^2} = 2$$ VSV

D5. Uppgiften nedan är från ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften. (0/2/2)

Figuren nedan visar en cirkel och en rätvinklig triangel. Cirkelns radie är lika lång som triangelns höjd. Om cirkeln skulle rulla ett varv så skulle sträckan motsvara triangelns bas. Pythagoras påstod att cirkelns area och triangelns area alltid är lika stora. Undersök om hans påstående stämmer.

Figuren är ej skalenligt ritad.



Basen hos triangeln motsvarar omkretsen av cirkeln:
Omkrets $= 2\pi \cdot r$

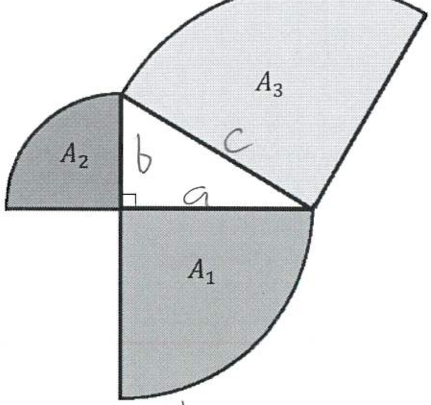
Arean av triangeln ges av $\frac{B \cdot H}{2} =$

$= \begin{bmatrix} B = 2\pi \cdot r \\ H = r \end{bmatrix} = \frac{2\pi r^2}{2} = \pi r^2$ ← samma formel ⇒ lika stora

Arean av cirkeln ges av πr^2 ← Pyth. hade rätt.

D6. Figuren visar tre stycken kvartscirklar med areorna A_1, A_2 och A_3

Visa att
$A_3 = A_1 + A_2$ (0/1/2)



Arean av en kvartscirkel: $\frac{\pi r^2}{4}$ (en hel cirkel delat på 4)

Om de tre radierna är a, b, c gäller:

$A_1 = \frac{\pi \cdot a^2}{4}$

$A_2 = \frac{\pi \cdot b^2}{4}$

$A_3 = \frac{\pi \cdot c^2}{4}$

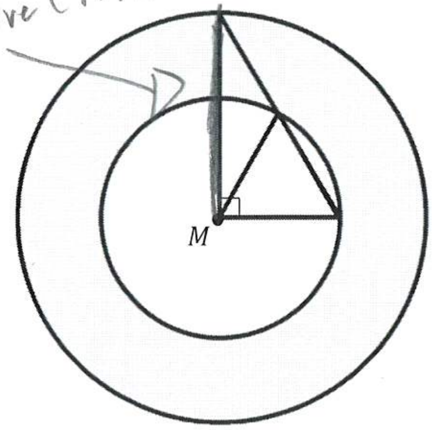
$A_1 + A_2 = \frac{\pi a^2}{4} + \frac{\pi b^2}{4} = \begin{bmatrix} \text{Bryt ut} \\ \pi/4 \end{bmatrix} =$

$= \frac{\pi}{4}(a^2 + b^2) = \begin{bmatrix} \text{Enligt Pyth. sats gäller:} \\ a^2 + b^2 = c^2 \end{bmatrix} =$

$= \pi/4 \cdot c^2 = A_3$

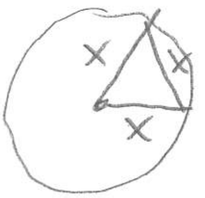
D7. Figuren nedan visar en cirkel i vilken en rätvinklig triangel är inritad.
Punkten M är cirkelns medelpunkt.
Den rätvinkliga triangeln består av en *liksidig* och en *likbent* triangel.

Radien hos den större cirkeln

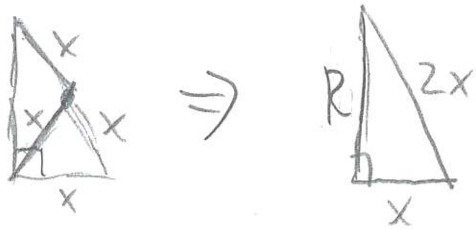


Visa att arean av den gula cirkelskivan är dubbelt så stor som den vita cirkeln i mitten. (0/1/3)

Om radien hos den lilla cirkeln är x gäller:



Eftersom den likbenta triangeln har samma "benlängd" som sidan hos den liksidiga gäller:



Pyth. sats: $x^2 + R^2 = (2x)^2 \Rightarrow x^2 + R^2 = 4x^2 \; [-x^2]$

$R^2 = 3x^2$

Det gula området ges av skillnaden mellan cirklarnas area:

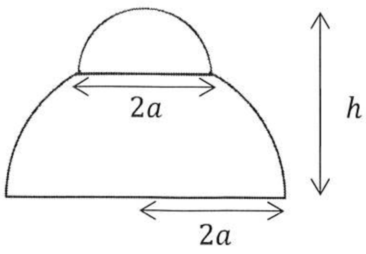
$A = A - A = \pi \cdot R^2 - \pi \cdot x^2 =$

$= [R^2 = 3x^2] = \pi \cdot 3x^2 - \pi x^2 = 2\pi x^2$

$A_{mitten} = \pi x^2$

$\frac{A}{A_{mitten}} = \frac{2\pi x^2}{\pi x^2} = 2$ VSV

D8. Figuren visar ett konstverk bestående av en halvcirkel placerad uppe på en annan halvcirkel. För den mindre halvcirkeln gäller att dess diameter utgör radien hos den större. Radien hos den större halvcirkeln är $2a$



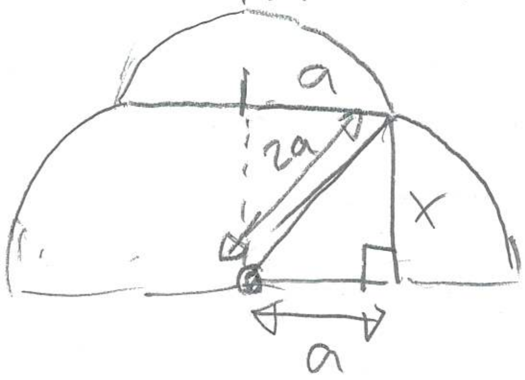
Visa att konstverkets höjd, h, kan skrivas

$h = \sqrt{3}a + a$

(0/1/3)

Det är lika långt från mitten av halvcirkeln till alla punkter på cirkelbågen $\Rightarrow$ 2a

Dras radien från mitten till punkten där lilla halvcirkeln börjar och sedan ner fås en rätvinklig triangel:



Dess höjd, x, fås via Pyth. sats:

$a^2 + x^2 = (2a)^2 \Rightarrow a^2 + x^2 = 4a^2$

Lös ut x $\Rightarrow a^2 + x^2 = 4a^2 \quad [-a^2]$

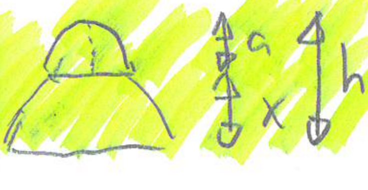
$x^2 = 3a^2 \quad [\sqrt{\ }]$

$x = \sqrt{3a^2}$

$x = \sqrt{3} \cdot \sqrt{a^2}$

$x = \sqrt{3}a$

Totala höjden =

$h = x + a = \left[x = \sqrt{3}a \right]$ 

$= \sqrt{3} \cdot a + a$ VSV