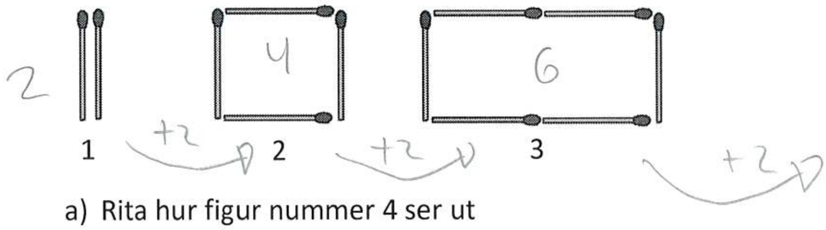
FACIT

Mönster och formler

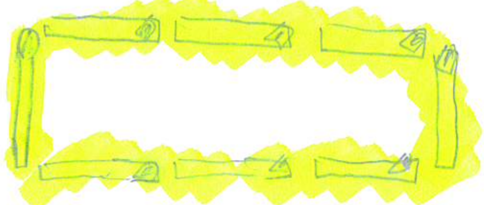
Utan digitala hjälpmedel

1. Figurerna nedan visar ett mönster av tändstickor.
   Anta att mönstret fortsätter på samma sätt



1 2 3 4

a) Rita hur figur nummer 4 ser ut (1/0/0)



Bredden ökar med 1 sticka (både uppe och nere) för varje ny figur.

b) Hur många stickor är det i figur nummer 5? (1/0/0)

2 fler än i figur nummer 4

$\Rightarrow 8 + 2 = 10$ st.

2. Figurerna nedan visar ett mönster med trianglar.

1 2 3

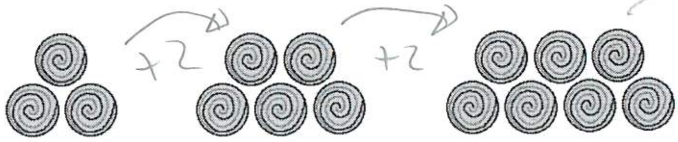
a) Visa med två av de givna figurerna
   att formeln $S = n \cdot 2 + 1$ ger antalet trianglar i figur nummer n. (1/0/0)

ex: Figur 1: $n = 1 \Rightarrow 1 \cdot 2 + 1 = 3$ vilket stämmer
Figur 2: $n = 2 \Rightarrow 2 \cdot 2 + 1 = 5$ vilket stämmer

b) Hur många trianglar är det i figur nummer 25? (1/0/0)

Figur 25: $n = 25 \Rightarrow S = 25 \cdot 2 + 1$
$= 50 + 1 = 51$ st.

3. Figurerna nedan visar ett mönster som skapas av ringar.
Anta att mönstret fortsätter på samma sätt,



1 2 3

+2 +2 +2 +2

4 5

a) Hur många ringar är det i figur nummer 5? (1/0/0)

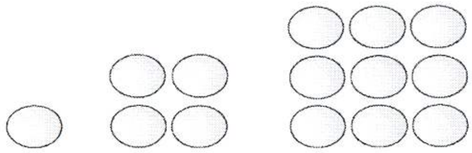
4 fler än figur nr 3 $\Rightarrow$ $7+4=11$ st

b) Finn en formel för att beräkna antalet ringar i figur nummer n (1/1/0)

Ökning = 2
Figur 0 = 1 st $\Rightarrow$ "Figur 0 + ökningen·n"

$S = 1 + 2n$

4. Figurerna nedan visar ett mönster med ägg.
Anta att mönstret fortsätter på samma sätt,



1 2 3

a) Beskriv mönstret med en formel som ger antalet ägg i figur nummer n (0/1/0)

Äggen är placerade i kvadrater där sidan är figurnumret $\Rightarrow$ Antalet ägg = "Arean"

$S = n^2$

b) Undersök om det finns någon figur som består av totalt 400 stycken ägg, och bestäm i sådana fall dess figurnummer. (0/2/0)

Finns det något heltal som löser ekvationen $n^2 = 400$?

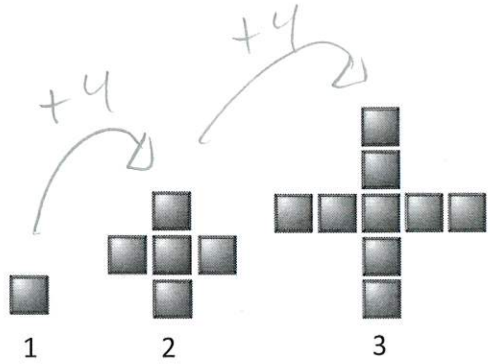
$n^2 = 400 \quad [\sqrt{\ }]$

$n = \sqrt{400} = \sqrt{4 \cdot 100}$

$= \sqrt{4} \cdot \sqrt{100} = 2 \cdot 10 = 20$

Ja det finns en sådan, med figurnummer $n = 20$

5. Inge Mönschter tittar på figurerna till höger och resonerar kring hur en formel för det totala antalet rutor i figur nummer n skulle kunna se ut.



"Det är ju 1 ruta i första figuren...
och så ökar antalet med 4 för varje ny
figur...så figur n borde innehålla den där
1:an som fanns i första figuren plus n stycken
ökningar med 4 i varje.
Totalt $1 + n \cdot 4$ stycken"

Inges formel är tyvärr fel.

a) Vad är det som blir fel i Inges resonemang? (0/1/0)

Inge utgår från figur 1. Då stämmer inte antalet ökningar och figurnumret överens. (Till figur 2 är det 1 ökning
Till figur 3 är det 2 ökningar
osv)
Om han däremot utgått från figur noll skulle resonemanget funkat.

b) Undersök om någon av figurerna består av 209 rutor, och bestäm i sådana fall dess figurnummer. (1/2/0)

En formel för det totala antalet rutor i figur n:

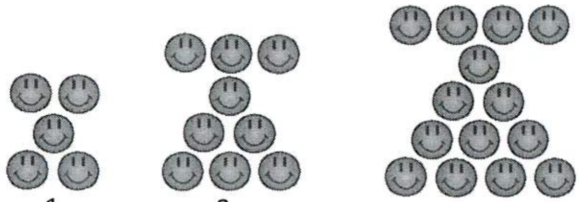
"Figur noll + ökningen · n"

Figur noll = −3
ökningen = 4 $\Rightarrow S = -3 + 4 \cdot n$

Finns det något heltal n som löser
$209 = -3 + 4 \cdot n$?

$209 = -3 + 4n\ [+3] \Rightarrow 212 = 4 \cdot n\ [/4] \Rightarrow n = 53$ $\Rightarrow$ Ja, nummer 53

6. Figurerna nedan visar ett komplicerat mönster med smileys.



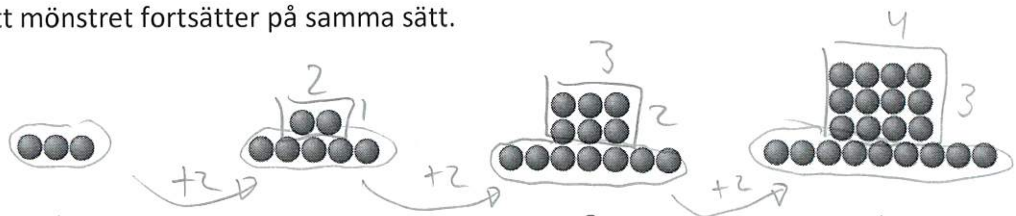
1 2 3

Formeln $\frac{n^2}{2} + \frac{5n}{2} + C$ där C är en konstant beskriver det totala antalet smileys i figur nummer n

Bestäm värdet av konstanten C (0/2/0)

Utgå från någon av figurerna, ex $n=2$.
Där finns 9 st.
Formeln säger: $n=2 \Rightarrow \frac{2^2}{2} + \frac{5\cdot 2}{2} + C = 7 + C$
Om detta ska stämma, krävs att $C=2$
$(7+2=9)$

7. Bilden nedan visar hur en kul typ skapar ett mönster av kulor.
Anta att mönstret fortsätter på samma sätt.



1 2 3 4

a) Hur många kulor finns i figur nummer 5? (0/1/0)

Figurerna består av 2 mönster. Basen ökar med 2 och rektangeln ovanpå växer.
Figur 5: Basen $=11$ Rektangeln: $5\cdot 4=20$ Tot $=31$ st

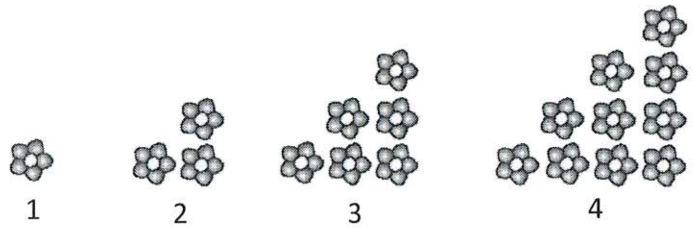
b) Ta fram en formel för antalet kulor i figur nummer n (0/1/2)

Antal kulor = Bas + Rektangel =
$(1+2n) + n\cdot(n-1) = 1+2n+n^2-n =$
$= n^2+n+1$

Basen ökar med 2 och "startar" (= fig 0) på 1

Rektangelns bas = figurnumret
Rektangelns höjd = figurnumret − 1

8. Figurerna nedan visar ett mönster med blommor.
Anta att mönstret fortsätter på samma sätt.



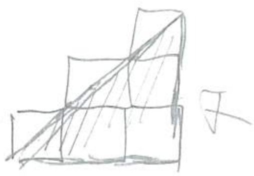
Ta fram en formel för antalet blommor i figur nummer n. (0/0/2)

Blommorna är placerade i en triangel.
Dess area är $\frac{\text{basen} \cdot \text{höjden}}{2}$

Bas och Höjd är detsamma som figur-numret, dvs $n \Rightarrow$ Arean $= \frac{n \cdot n}{2}$

MEN! Detta ger för få blommor då halva diagonalen fattas:

ex: figur nummer 3:



Arean $\left(\frac{n^2}{2}\right)$

Behöver läggas till

Diagonalens antal är alltid figurnumret $\Rightarrow$
Det som ska läggas till $n/2$

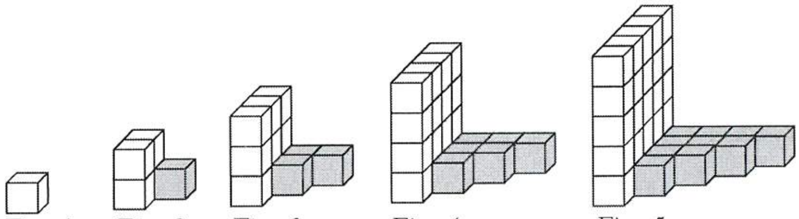
Totalt: $\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$

(Kan även resoneras fram på annat sätt t.ex att varje figur kan ses som
antal par
summan i varje par
$1+2+3+\ldots n \Rightarrow (1+n)+(2+n-1)$ osv $\Rightarrow \frac{n}{2} \cdot (n+1)$)

MED digitala hjälpmedel

D1. Uppgiften nedan är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften. (0/4/4)

Li Shanlan var en kinesisk matematiker som levde i mitten av 1800-talet.
Han konstruerade regelbundna figurer av små kuber enligt följande mönster:



Figur 1 *Figur 2* *Figur 3* *Figur 4* *Figur 5*

Figur	Vita kuber	Grå kuber	Totala antalet kuber
1	1	0	1
2	4	1	5
3	9	3	12
4	16	6	22
5	25	10	35

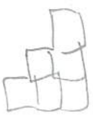
- Beskriv med ord och/eller formel hur man kan beräkna antalet vita kuber i figur n.
- Beskriv med ord och/eller formel hur man kan beräkna antalet grå kuber i figur n.
- För att beräkna totala antalet kuber i figur n använde Li Shanlan formeln:

$$\frac{n(3n-1)}{2} = \text{totala antalet kuber i figur } n$$

Stämmer formeln för alla värden på n? Motivera.

- Antalet vita kuber är arean av en kvadrat med figurnumret
  $\Rightarrow$ Antal vita $= n^2$
- Antalet gråa kuber är summan av 1 t.om figurnumret -1

ex: figur 4:



1 2 3

$1+2+3=6$

För figur n gäller: $1+2+3+\ldots+(n-1)$

= Lägg ihop parvis: $1+(n-1)=n$, $2+(n-2)=n$ antal par

Varje par har summan $n \Rightarrow$ Antal gråa $= \frac{(n-1)}{2} \cdot n$

- Formeln för totala antalet är antalet vita + antal gråa

$= n^2 + \frac{n\cdot(n-1)}{2} = \left[n^2 = \frac{2\cdot n^2}{2}\right] = \frac{2\cdot n^2}{2} + \frac{n(n-1)}{2} =$ [Skriv på samma bråkstreck]

$= \frac{2n^2 + n(n-1)}{2} = \left[n\cdot(n-1) = n^2 - n\right] = \frac{2n^2 + n^2 - n}{2} =$

$= \frac{3n^2 - n}{2} =$ [Bryt ut n] $= \frac{n\cdot(3n-1)}{2}$ Vilket är Li:s formel

$\Rightarrow$ Formeln stämmer