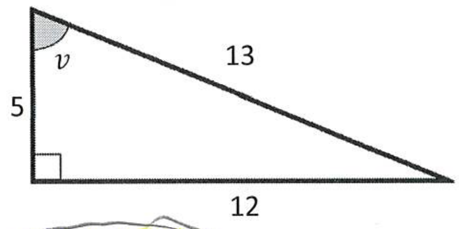
FACIT

Trigonometri

Utan digitala hjälpmedel

1. Nedan visas en rätvinklig triangel med alla sidor angivna och där vinkel v markerats. **Vilket** av alternativen **A – D** nedan visar ett korrekt trigonometriskt uttryck för vinkel v? (1/0/0)



$$\sin v = \frac{\text{Mot}}{\text{Hyp}} = \frac{12}{13}$$

$$\cos v = \frac{\text{När}}{\text{Hyp}} = \frac{5}{13}$$

$$\tan v = \frac{\text{Mot}}{\text{När}} = \frac{12}{5}$$

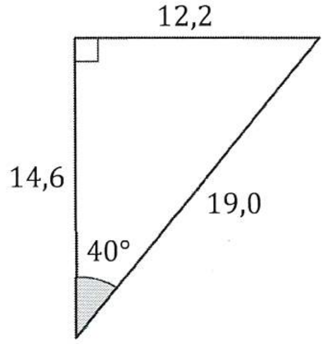
A $\sin(v) = \dfrac{12}{13}$

B $\sin(v) = \dfrac{5}{13}$

C $\cos(v) = \dfrac{12}{13}$

D $\tan(v) = \dfrac{5}{13}$

2. Figuren till höger visar en rätvinklig triangel med sidorna givna.



a) Använd triangeln och ringa in vilket av nedanstående alternativ som ger det bästa värdet av det trigonometriska uttrycket $\boldsymbol{cos}\ (\mathbf{40°})$ (1/0/0)

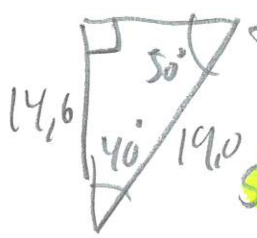
$\dfrac{19,0}{14,6}$ $\quad \dfrac{12,2}{19,0}$ $\quad \dfrac{12,2}{14,6}$ $\quad \dfrac{19,0}{12,2}$ $\quad \dfrac{14,6}{19,0}$

$$\cos 40° = \frac{\text{När}}{\text{Hyp}} = \frac{14,6}{19,0}$$

b) Använd triangeln och bestäm ett ungefärligt värde av $\sin^{-1}\left(\dfrac{14,6}{19,0}\right)$ (1/0/0)

$\sin^{-1}$ ger den vinkel som beskrivs av

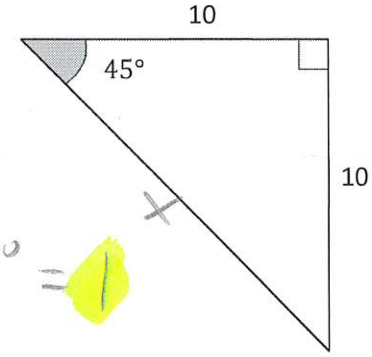
$$\sin x = \frac{14,6}{19,0} \qquad \sin x = \frac{\text{Mot}}{\text{Hyp}} \Rightarrow$$



Vinkeln som söks

$$\sin^{-1}\frac{14,6}{19,0} \approx 50°$$

3. Figuren visar en likbent rätvinklig triangel.
Använd figuren för att bestämma ett **exakt** värde på



a) $\tan(45°)$ (1/0/0)

$\tan 45° = \frac{Mot}{När} = \frac{10}{10} = 1$

$\Rightarrow \tan 45° = 1$

b) $\cos(45°)$ (0/2/0)

$\cos 45° = \frac{När}{Hyp} = \frac{10}{\sqrt{200}}$ (som också kan skrivas $1/\sqrt{2}$)

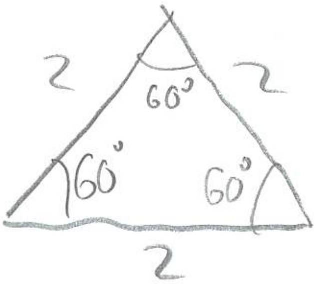
Hyp. saknas, men kan bestämmas med Pyth. sats: $10^2 + 10^2 = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{200}$

4. En liksidig triangel med sidan 2 cm kan användas för att bestämma exakta värden på både $\sin(30°)$ och $\cos(30°)$.

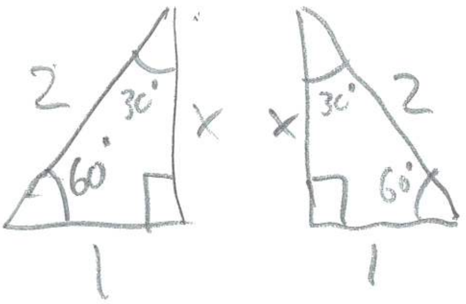
Hitta dessa värden med hjälp av en sådan liksidig triangel. (0/1/2)

Rita upp triangeln:

Liksidig $\Rightarrow$ Alla vinklar är 60°



Dela den i två rätvinkliga trianglar:



(Eftersom 60°-vinkeln delades mitt itu fick två st 30°)

$\sin 30° = \frac{Mot}{Hyp} \Rightarrow \sin 30° = \frac{1}{2}$

$\cos 30° = \frac{När}{Hyp}$

När saknas men kan bestämmas via Pyth. sats.

$x^2 + 1^2 = 2^2 \Rightarrow x = \sqrt{3}$

$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

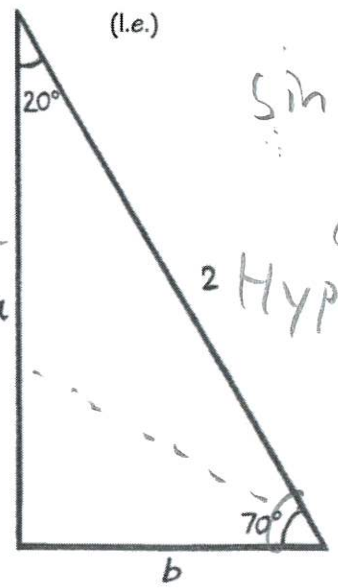
5. Uppgiften nedan är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften.

Bestäm längden på sidan a i triangeln med hjälp av tabellen.

Figuren är ej skalenligt ritad.

Svar: 1,88 l.e. (0/0/1)

Grader	Sin	Cos	Tan
0	0,000	1,000	0,000
5	0,087	0,996	0,087
10	0,174	0,985	0,176
15	0,259	0,966	0,268
20	0,342	0,940	0,364
25	0,423	0,906	0,466
30	0,500	0,866	0,577
35	0,574	0,819	0,700
40	0,643	0,766	0,839
45	0,707	0,707	1,000
50	0,766	0,643	1,192
55	0,819	0,574	1,428
60	0,866	0,500	1,732
65	0,906	0,423	2,145
70	0,940	0,342	2,747
75	0,966	0,259	3,732
80	0,985	0,174	5,671
85	0,996	0,087	11,430
90	1,000	0,000	



$\sin 70° = \frac{a}{2}$

$a = \sin 70° \cdot 2$

Tabellen ger $\sin 70°$ till 0,940

$a = 0{,}940 \cdot 2 = 1{,}88$

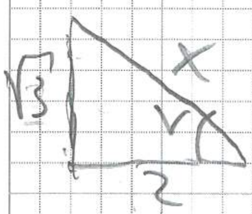
6. Uppgiften nedan är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften. (0/1/2)

De två kortaste sidorna i en rätvinklig triangel har längderna $\sqrt{3}$ och 2. Låt v vara den minsta vinkeln i triangeln. Vilket värde har $\sin v$? Ringa in ditt svar och motivera i rutan. (och runt om...)

De två kortaste ⇒ Mot och När

Dessa är $\sqrt{3}$ och 2

$\sqrt{\frac{3}{7}}$ $\sqrt{\frac{4}{7}}$ $\sqrt{\frac{3}{5}}$ $\sqrt{\frac{3}{4}}$ $\sqrt{\frac{4}{5}}$



$\sqrt{3} < 2 \Rightarrow$ vinkel v måste vara mellan 2 och hyp. (minsta vinkeln)

$\sin v = \frac{\text{Mot}}{\text{Hyp}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$

Hyp fås med Pyth. sats:

$2^2 + (\sqrt{3})^2 = x^2$

$4 + 3 = x^2$

$x = \sqrt{7}$

Två rötter delat på varandra $\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{3}{7}}$

$\sin v = \sqrt{\frac{3}{7}}$

MED digitala hjälpmedel

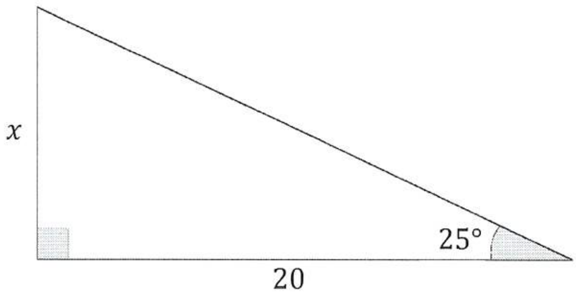
D1. Uppgiften nedan är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften. (1/0/0)

Ange ett värde på vinkel v då $\cos v = 0{,}718$. Svara med en decimal.
Endast svar krävs.

Antingen $\cos^{-1} 0{,}718$ på räknaren/Geogebra eller "Lös"-kommandot i Geogebra.

Oavsett $\Rightarrow$ $v \approx 44{,}1^\circ$

D2. Nedan visas en rätvinklig triangel. Bestäm sidan x. (2/0/0)



Ur vinkel 25°:s persp. gäller:

x = Mot 20 = När

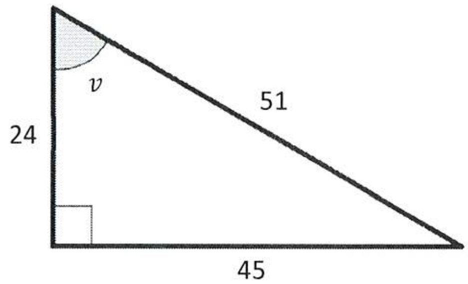
"Mot/När" $\Rightarrow$ Tangens

$\tan 25^\circ = \dfrac{x}{20}$

$x = 20 \cdot \tan 25^\circ$

el. "Lös" $\Rightarrow$ $x \approx 9{,}33$

D3. I figuren nedan visas en triangel



Bestäm vinkel v. *Svara med en decimal!* (2/0/0)

Välj själv vilka 2 sidor som ska användas, ex 24 och 51.

Ur vinkel v:s perspektiv är dessa när och hyp $\Rightarrow$ cosinus: $\cos v = \dfrac{24}{51}$

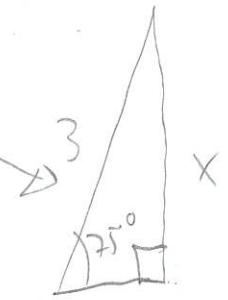
$v = \cos^{-1}\left(\dfrac{24}{51}\right) \Rightarrow v \approx 61{,}9^\circ$

D4. Uppgiften nedan är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften. (2/0/0)

En stege står säkert då vinkeln mellan marken och stegen är cirka 75°.
Om en 3,0 meter lång stege ställs säkert mot en vägg, hur högt når då stegen?

X

Enligt texten gäller:



Ur 75° persp. gäller: Mot = x, Hyp = 3 $\Rightarrow \sin 75^\circ = \frac{x}{3}$ [·3]

$x = 3 \cdot \sin 75^\circ = 2{,}9 \Rightarrow$ Stegen når 2,9 meter upp

D5. För en rätvinklig triangel gäller följande:

En av triangelns vinklar är v

$\sin v = 0{,}8 \Rightarrow$ Ur vinkel v:s perspektiv är $\frac{\text{Mot}}{\text{Hyp}} = 0{,}8$

a) Bestäm triangelns vinklar. (1/1/0)

$\sin v = 0{,}8$ [$\sin^{-1}$]

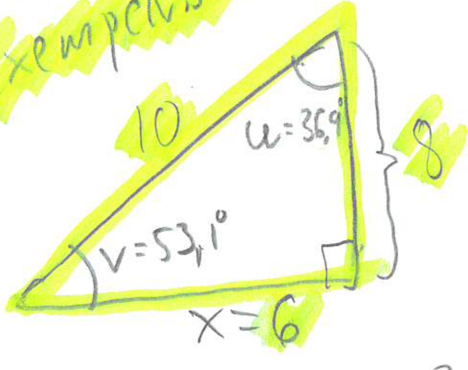
$v = \sin^{-1} 0{,}8 = 53{,}13^\circ$

$u = 36{,}87^\circ \Leftarrow 90^\circ + 53{,}13^\circ + u = 180^\circ$

Den sista vinkeln fås mha vinkelsumman

b) Triangeln kan ha många möjliga utseenden. Rita en figur som visar en möjlighet för hur triangeln kan se ut. Ange triangelns sidor i din figur. (0/2/0)

exempelvis:



Välj en sida, ex hyp = 10

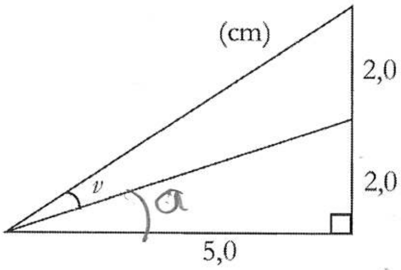
Då blir h = 8 (eftersom $\sin v = 0{,}8$)

Sista sidan kan bestämmas med Pyth. sats eller trigonometri

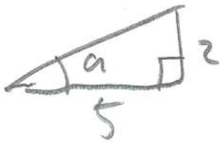
$x^2 + 8^2 = 10^2 \Rightarrow x = \sqrt{100 - 64} = 6$

D6. Uppgiften nedan är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften. (2/1/0)

Bestäm vinkel v i figuren.
Figuren är ej skalenligt ritad.

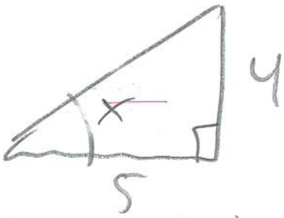


Vinkel a kan fås via trig. i triangeln



$\tan a = \frac{2}{5} \Rightarrow a = \tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right) = 21{,}8°$

Totala vinkeln, $x = v + a$
fås via den stora triangeln



$\tan x = \frac{4}{5}$

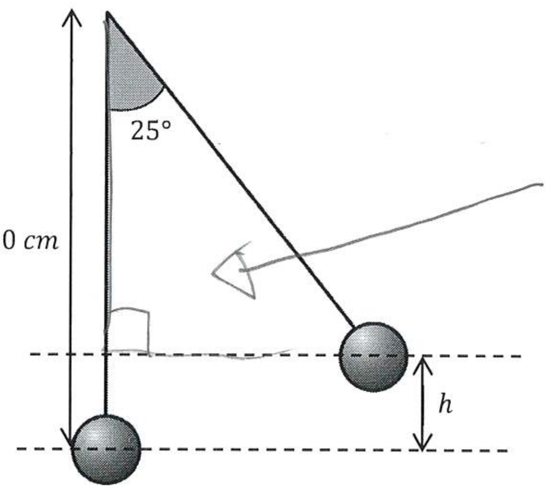
$x = \tan^{-1}\frac{4}{5}$
$= 38{,}7°$

V är skillnaden mellan dessa: $V = 38{,}7 - 21{,}8$
$V = 16{,}9°$

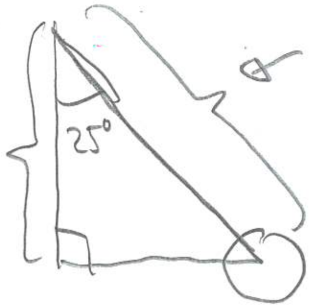
D7. Figuren nedan visar en pendel med längden 20 cm som släpps från en viss höjd.

Då är vinkeln mellan lodlinjen och pendeln 25°.

Vilken höjd, h ,släpps pendeln ifrån? (0/3/0)



Det bildas en rätvinklig triangel till höger.
För den gäller:



20-h

Pendelns längd = 20 cm

Ur vinkeln 25°:s persp. gäller: Hyp = 20
När = 20 − h

"När, Hyp" ⇒ cos

$\cos 25° = \frac{20-h}{20}$ [·20]

$20 \cdot \cos 25° = 20 - h$ [+h]

$h + 20 \cdot \cos 25° = 20$ [−20·cos 25°]

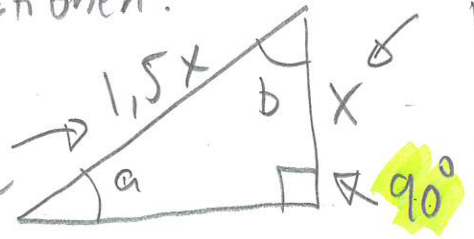
→ $h = 20 - 20 \cdot \cos 25°$

$h \approx 1{,}87$ cm

D8. Uppgiften nedan är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften. (0/2/0)

Bestäm vinklarna i en rätvinklig triangel där hypotenusan är 50 % längre än den ena katetern.

Skiss över den givna informationen:



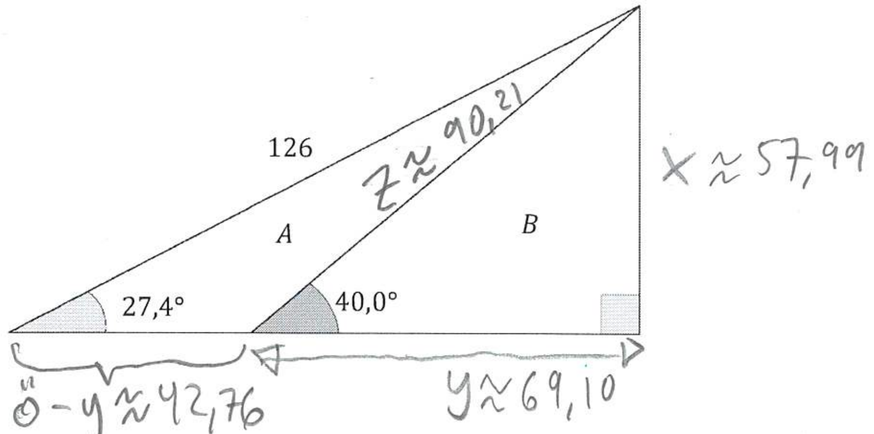
För vinkel a gäller:

$\sin a = \frac{x}{1{,}5x} = \frac{1}{1{,}5}$

$a = \sin^{-1}\left(\frac{1}{1{,}5}\right) \approx 41{,}81°$

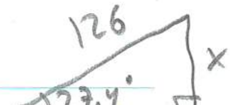
b kan fås med trigonometri eller vinkelsumman: $b = 90 - 41{,}81 \Rightarrow b = 48{,}19°$

D9. Figuren visar de två trianglarna A och B som satta bredvid varandra bildar en stor rätvinklig triangel.



Bestäm omkretsen av triangel A (1/2/1)

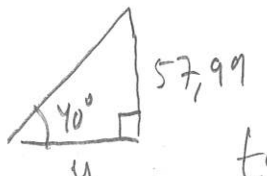
I) Bestäm den gemensamma höjden, x:



$\sin 27{,}4° = \frac{x}{126}$

$x \approx 57{,}99$

II) Bestäm B:s bas, y

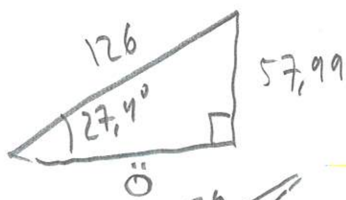


$\tan 40° = \frac{57{,}99}{y} \Rightarrow y \approx 69{,}10$

III) Bestäm sista siden i B, dvs hypotenusan z

$x^2 + y^2 = z^2 \Rightarrow z \approx 90{,}21$

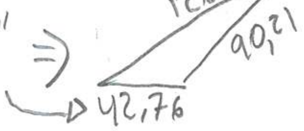
IV) Bestäm basen hos stora triangeln, ö



$\cos 27{,}4° = \frac{ö}{126}$

$ö \approx 111{,}86$

V) Sista siden hos A: "ö − y" ⇒



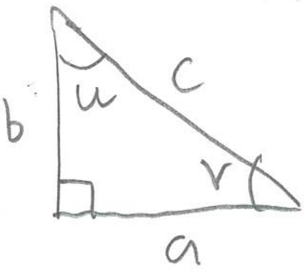
Omkretsen ≈ 259

D10. Tryggve Triggonometry påstår att följande samband gäller för alla vinklar v, där v är en vinkel inuti en rätvinklig triangel.

$$\sin(v) = \cos(90° - v)$$

Tryggve har rätt. Använd en rätvinklig triangel för att bevisa varför sambandet gäller. (0/1/2)

Rita en allmän rätvinklig triangel



Vinkelsumman $\Rightarrow$

$90° + u + v = 180$

$u = 90 - v$

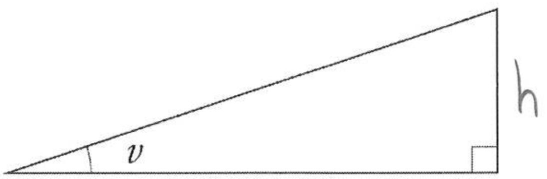
$\sin v = \cos u$

$u = 90 - v \Rightarrow \sin v = \cos(90° - v)$

Ur v:s perspektiv: $\sin v = \frac{b}{c}$ $\left(\frac{\text{Mot}}{\text{Hyp}}\right)$

Ur u:s perspektiv $\cos u = \frac{b}{c}$ $\left(\frac{\text{När}}{\text{Hyp}}\right)$

D11. Uppgiften nedan är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften.



I en rätvinklig triangel har en av kateterna längden 4 cm.
En av triangelns övriga vinklar är v (se figur).

a) Ange triangelns area A som funktion av vinkel v. (0/2/1)

b) Bestäm funktionens definitionsmängd. (0/1/1)

c) Resonera kring hur arean kan variera. (0/1/1)

a) $A = \frac{b \cdot h}{2}$ $b = 4$ h beror på v enl.

$\tan v = \frac{h}{4} \Rightarrow h = 4 \cdot \tan v$

$A = \frac{4 \cdot 4 \cdot \tan v}{2} = 8 \cdot \tan v$

b) v måste vara positiv och mindre än 90° (annars blir det ingen triangel) $\Rightarrow 0° < v < 90°$

c) Arean är alltid positiv, dvs $A > 0$, men kan bli hur stor som helst om $v \to 90° \Rightarrow 0 < A < \infty$ ("oändligheten")