

FACIT

Kapitel 1 - Repetition

Del 1 – Utan digitalt hjälpmedel – Endast svar

1. Ange ett valfritt polynom av grad 4 med 3 termer.

Ex: $5x^4 + 12x - 9$ (1/0/0)
Svar: _____

2. För vilka värden på x är uttrycket $\frac{2x-6}{x(x+5)}$ inte definierat?

"Nämnaren = 0"
Svar: $x=0$ och $x=-5$ (1/0/0)
Svar: _____

3. Skriv polynomen i faktorform

a) $p(x) = x^2 - 5x = x(x-5)$

Svar: $x(x-5)$ (1/0/0)
Svar: _____

b) $q(x) = 3x^2 - 27 = 3(x^2 - 9)$

Svar: $3(x-3)(x+3)$ (1/0/0)
Svar: _____

c) $r(x) = 2x^2 + 4x - 48 = 2(x^2 + 2x - 24)$

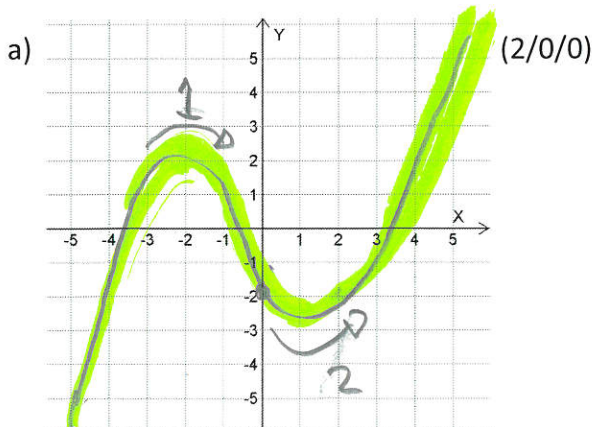
p-q: $\Delta = 1 + 24 \Rightarrow x_1 = 4$
 $\boxed{5} \Rightarrow x_2 = -6$

Svar: $2(x-4)(x+6)$ (1/1/0)
Svar: _____

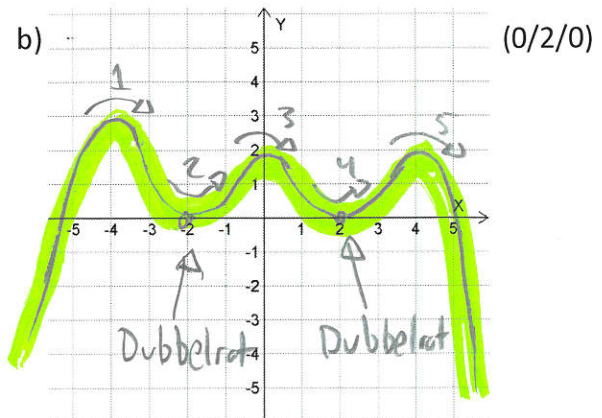
4. Ange ett valfritt rationellt uttryck som är odefinierat för $x = 4$ och $x = -4$

Ex: $\frac{3x}{(x-4)(x+4)}$ (1/0/0)
Svar: _____

5. Rita i de tomma koordinatsystemen nedan grafen till en polynomfunktion som i bilden visar att den uppfyller villkoren som beskrivs nedanför respektive koordinatsystem.



Polynom av grad 3 med konstantterm -2
2 vändningar Skär y-axeln vid -2



Polynom av grad 6 med två dubbelrötter
5 vändningar Dubbelrot \Rightarrow Vänder på x-axeln.

6. Utgå från funktionen $f(x) = \frac{2x - 4}{x^2 - 4}$

Bestäm

a) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$
 Sätt in $x=3$:
 $\frac{6-4}{9-4} = \frac{2}{5}$

Svar: $\frac{2}{5}$ (1/0/0)

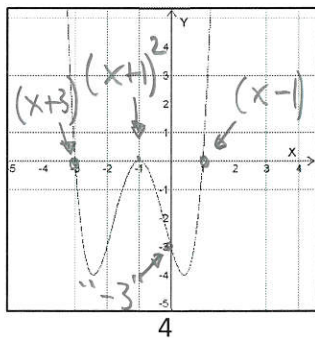
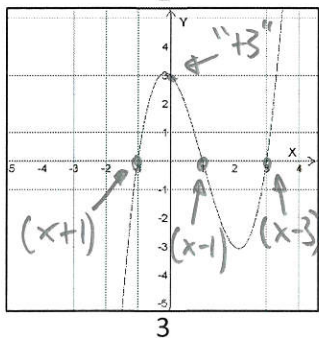
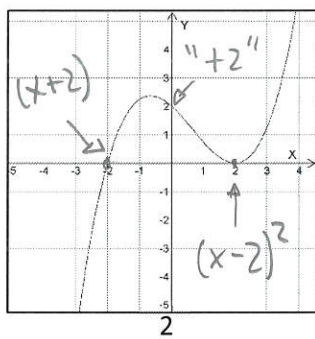
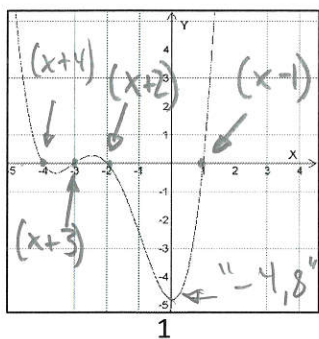
b) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ Förenkla uttrycket
 $x=2$ är odefinierat
 $\frac{2(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{2}{x+2}$

Svar: $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ (0/1/0)

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ Nämnaren växer snabbare än täljaren
 \Rightarrow Svaret går mot noll.

Svar: 0 (0/1/0)

7. Nedan visas 4 grafer (1 - 4) och 8 funktionsuttryck (A - H).
 Para ihop varje graf med rätt funktionsuttryck.
 Observera att det blir 4 funktionsuttryck över!



- A $0,25(x+2)(x-2)^2$ ← Graf 2
- B $x^3 - 3x^2 - x + 3$ ← Graf 3
- C $0,2(x+4)(x+2)(x+3)(x-1)$ ← Graf 1
- D $2(x-3)(x+1)(x-1)^2$
- E $0,4(x-2)(x+2)^2$
- F $x^3 + 3x^2 + x - 3$
- G $0,5(x-4)(x-2)(x-3)(x+1)$
- H $(x+3)(x-1)(x+1)^2$ ← Graf 4

Svar: Graf 1 C
 Graf 2 A
 Graf 3 B
 Graf 4 H (1/2/0)

8. Lös ekvationerna

a) $4x(5+x)(2x-7) = 0$

$x=0$ $x=-5$ $x=\frac{7}{2}$

Svar: $x_1=0$ $x_2=-5$ $x_3=\frac{7}{2}$ (1/0/0)

b) $2x^3 - 12x^2 = 0$

Bryt ut $2x^2$
 $2x^2(x-6) = 0$

Svar: $x_1=0$ $x_2=6$ (1/0/0)

c) $(2x^2 - 32)(6x - 3) = 0$

$2(x^2-16)(6x-3) = 0$
 $2(x-4)(x+4)(6x-3) = 0$

Svar: $x_1=4$ $x_2=-4$ $x_3=\frac{1}{2}$ (0/1/0)

d) $x(x-2)^2 + (x-2)^3 = 0$

Bryt ut $(x-2)^2$:
 $(x-2)^2(x + (x-2)) = (x-2)^2(2x-2)$

Svar: $x_1=2$ $x_2=1$ (0/0/1)

9. Förenkla uttrycken nedan så långt som möjligt

a) $\frac{2x-6}{3x-9} = \frac{2(x-3)}{3(x-3)} = \frac{2}{3}$

Svar: $\frac{2}{3}$ (1/0/0)

b) $\frac{x+5}{25-x^2} = \frac{(x+5) \cdot 1}{(5-x)(5+x)}$ OBS! Sätt gärna dit ettan.
 $= \left[\frac{x+5}{5+x} \right] = \frac{1}{5-x}$

Svar: $\frac{1}{5-x}$ (1/0/0)

c) $\frac{(4x+8)^3}{2(2+x)^5} = \left[\frac{\text{Bryt ut } 4 \text{ ur}}{\text{varje } (4x+8)} \right] =$
 $= \frac{4^3(x+2)^3}{2(2+x)^5} = \left[\frac{4^3=32}{2} \right] = \frac{32}{(2+x)^2}$

Svar: $\frac{32}{(2+x)^2}$ (0/1/0)

d) $\frac{2x^2-4x}{x^2-4x+4} = \frac{2x(x-2)}{(x-2)^2}$

Pq: $2x-4 \Rightarrow x_1=2$
 $0 \Rightarrow x_2=2$

Svar: $\frac{2x}{x-2}$ (0/1/0)

e) $\frac{12-2x+(6-x)^3}{6-x}$

$12-2x = 2(6-x)$
 $\frac{2(6-x)+(6-x)^3}{(6-x)}$

[Bryt ut] = $\frac{(6-x)(2+(6-x)^2)}{(6-x)}$

Svar: $2+(6-x)^2 = 38-12x+x^2$ (0/0/1)

10. För det rationella uttrycket $\frac{T+x}{4Nx-x^2}$ där T och N är konstanter gäller följande två villkor:

- Uttrycket är odefinierat för $x = 20$
- Uttryckets värde är 1 då $x = 10$

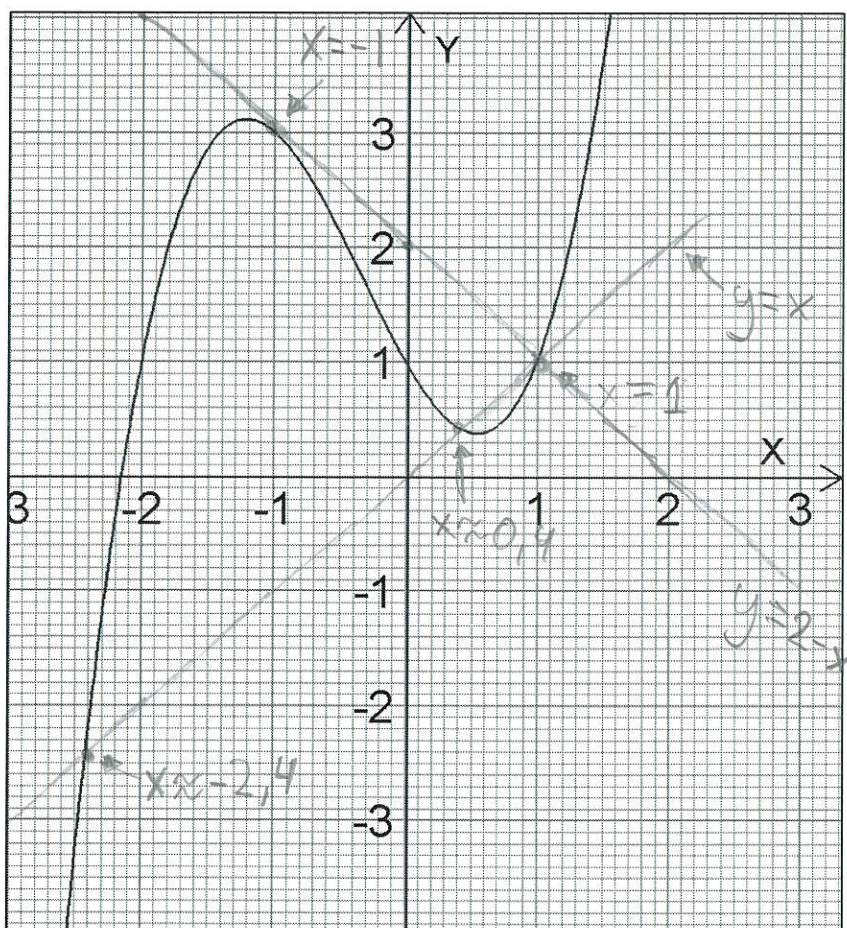
$x=20$ gör att nämnaren = 0
 $4N \cdot 20 - 400 = 0 \Rightarrow N = 5$
 (Nämnaren då $x=10$) = $200 - 100 = 100 \Rightarrow T = 90$ ($\frac{90+10}{100} = 1$)

Bestäm värdet på konstanterna T och N

Svar: $T = \underline{90}$
 $N = \underline{5}$

(0/2/0)

11. Figuren nedan visar grafen till funktionen $f(x) = x^3 + x^2 - 2x + 1$



Ekvationslösning
 motsvarar skärnings-
 punkter mellan grafer.

a) Lös ekvationen $x^3 + x^2 - 2x + 1 = x$ ← Rita in $y=x$
 Svara med en decimal!

Svar: $x_1 = -2,4$ $x_2 = 0,4$
 $x_3 = 1$ (1/1/0)

b) Lös ekvationen $-x^3 - x^2 + 2x = -1 + x$

OBS! Ej grafen i bild
 Stura om $\Rightarrow x^3 + x^2 - 2x + 1 = 2 - x$

Svar: $x_1 = -1$ $x_2 = 1$ (0/0/1)

12. Ange valfritt rationellt uttryck som saknar gränsvärde när x närmar sig 4

"Saknar gränsvärde" \Rightarrow Faktorn finns i nämnaren (men ej i täljaren)
 då $x \rightarrow 4$ $(x-4)$
 Svar: Ex: $\frac{2x}{x-4}$ (0/1/0)

13. I funktionsuttrycket $f(x) = \frac{3 - A + 2Ax}{4x + A^{-x}}$ är A en konstant, $A > 1$

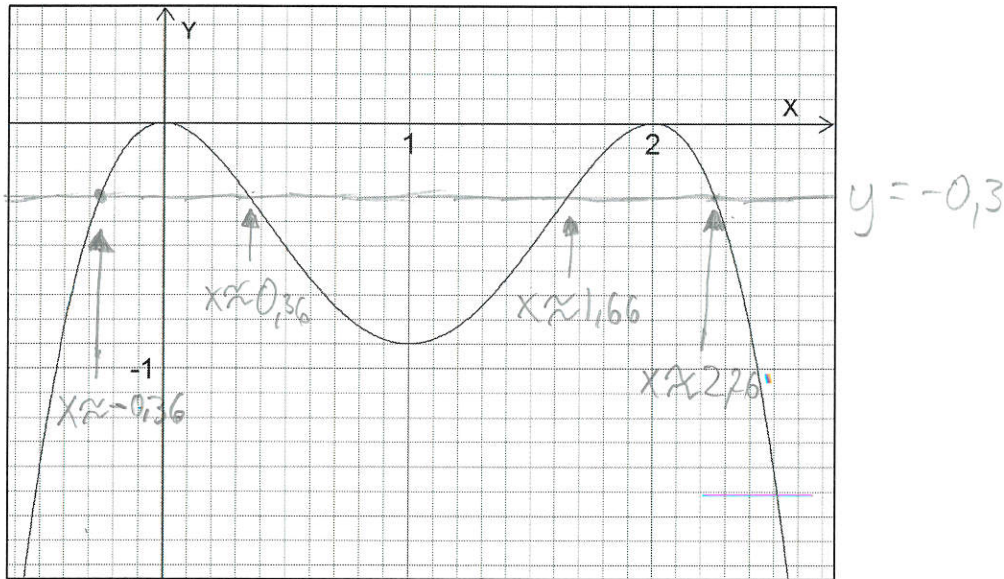
Bestäm det värde på konstanten A som gör att $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 3$

$x \rightarrow \infty \Rightarrow f(x) \approx \frac{2Ax}{4x} = 3 \Rightarrow A = 6$

($A^{-x} = \frac{1}{A^x}$ som går mot 0 då $x \rightarrow \infty$)

Svar: $A = 6$ (0/0/1)

14. Figuren nedan visar huvuddragen av grafen till polynomfunktionen f



a) Ange funktionens grad

Tre vändpunkter \Rightarrow Grad 4

Svar: 4 (1/0/0)

b) Lös ekvationen $f(x) = -0,3$

Svara med en decimal

← Rita in $y = -0,3$

Svar: $x \approx -0,4$, $x \approx 0,4$, $x \approx 1,7$, $x \approx 2,3$ (0/2/0)

c) Ange funktionsuttrycket till $f(x)$

Dubbelrötter vid $x=0$

och $x=2 \Rightarrow f(x) = a \cdot x^2 \cdot (x-2)^2$

Svar: $-0,8 \cdot x^2 \cdot (x-2)^2$ (0/1/1)

a kan fås via t.ex punkten $(1; -0,8) \Rightarrow a = -0,8$

Del 2 – Utan digitalt hjälpmedel – Fullständiga uträkningar krävs

15. Skriv polynomet $p(x) = 2x(x^2 - 16)(x + 1)$ i utvecklad form. (2/0/0)

Gånga först in $2x$ i $(x^2 - 16) \Rightarrow (2x^3 - 32x)(x + 1)$

Gånga därefter i hop $(2x^3 - 32x)$ och $(x + 1) \Rightarrow$

$$2x^4 + 2x^3 - 32x^2 - 32x$$

16. Rätte vill försöka förenkla det rationella uttrycket $\frac{2x + 8}{5x + 4}$ och gör då nedanstående beräkning.

$$\frac{2x + 8}{5x + 4} = \frac{2x + 2}{5x + 1}$$

Visa genom att stoppa in två egna exempel på x -värden att det inte går att förenkla uttrycket på detta vis.

Om förenklingen ska gälla är värdet o förändrat för alla x : (2/0/0)

$x = 1$	Före: $\frac{2 \cdot 1 + 8}{5 \cdot 1 + 4} = \frac{10}{9}$	Efter: $\frac{2 \cdot 1 + 2}{5 \cdot 1 + 1} = \frac{4}{6}$	$x = 2$	Före: $\frac{12}{14}$
	$\frac{10}{9} \neq \frac{4}{6}$			Efter: $\frac{6}{11}$
				$\frac{12}{14} \neq \frac{6}{11}$

17. Utgå från uttrycket

$$\frac{8}{x + 4} + \frac{32}{x(x + 4)}$$

a) Förenkla uttrycket så långt som möjligt

(1/1/0)

$$\frac{8}{(x+4)} + \frac{32}{x(x+4)} = \left[\begin{array}{l} \text{Faktoreri:} \\ x(x+4) \end{array} \right] = \frac{8x}{x(x+4)} + \frac{32}{x(x+4)} = \left[\begin{array}{l} \text{Gemensam} \\ \text{nämnamn} \end{array} \right] =$$

$$\stackrel{\uparrow}{\text{Behöver } x} = \frac{8x + 32}{x(x+4)} = \left[\begin{array}{l} \text{Bryt ut } 8 \\ \text{ur täljaren} \end{array} \right] = \frac{8(x+4)}{x(x+4)} = \frac{8}{x}$$

b) Lös ekvationen $\frac{8}{x + 4} + \frac{32}{x(x + 4)} = -2$

(1/1/0)

Otillåtna: $x = -4$
 x -värden: $x = 0$

Använd förenklingen ifrån a)

$$\frac{8}{x} = -2 \Leftrightarrow 8 = -2x \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{8}{-2} = -4$$

$x = -4$ är otillåtet \Rightarrow lösning saknas!

18. För ett fjärdegradspolynom, p , gäller följande:

- Grafen till p går igenom origo \rightarrow En faktor = x
- p har en dubbelrot vid $x = 1 \rightarrow (x-1)^2$
- $x = 4$ är en lösning till ekvationen $p(x) = 0 \rightarrow (x-4)$
- $p(3) = 6$

Bestäm funktionsuttrycket till $p(x)$.

(1/2/0)

$$p(x) = a \cdot x \cdot (x-1)^2 (x-4)$$

$p(3)=6$ gör att a kan bestämmas:

$$a \cdot 3 \cdot (3-1)^2 (3-4) = 6 \Leftrightarrow a \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot (-1) = 6 \Leftrightarrow$$

$$-12a = 6 \Leftrightarrow a = -0,5$$

$$p(x) = -0,5 x (x-4)(x-1)^2$$

19. a) Förenkla uttrycket nedan så långt som möjligt.*

(0/1/2)

$$\frac{-x+4}{3(x-4)} + \frac{4x+4}{3(x-3)} = \left[\text{Faktorer:} \right] = \frac{(-x+4)(x-3)}{3(x-4)(x-3)} + \frac{(4x+4)(x-4)}{3(x-3)(x-4)} =$$

$$= \left[\text{Gemensam nämnare} \right] = \frac{-x^2+3x+4x-12+4x^2-16x+4x-16}{3(x-4)(x-3)} = \frac{3x^2-5x-28}{3(x-4)(x-3)}$$

$$= \left[\text{Bryt ut 3 i täljaren} \right] = \frac{3(x^2 - \frac{5}{3}x - \frac{28}{3})}{3(x-4)(x-3)} = \left[\begin{array}{l} p \cdot q \text{ i täljaren:} \\ \frac{5 \cdot 5}{6 \cdot 6} + \frac{28}{3} \\ \sqrt{\frac{25}{36} + \frac{336}{36}} = \frac{19}{6} \end{array} \right] = \frac{3(x-4)(x+\frac{7}{3})}{3(x-4)(x-3)}$$

b) Lös ekvationen

(0/2/0)

Oftillåtna: $x=4$
 $x=3$
 $\frac{-x+4}{3(x-4)} + \frac{4x+4}{3(x-3)} = \frac{1}{3}$

Använd den hysteriska förenklingen ifrån a):

$$\frac{x+\frac{7}{3}}{x-3} \rightarrow \frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$$3x+7 = x-3$$

$$2x+7 = -3$$

$$2x = -10$$

$$x = -5$$

*Mkt svår utan räknare

20. För funktionen f gäller att $f(x) = 5x + x^2 + 1$.

Bestäm gränsvärdet nedan.

(0/2/1)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \left[\begin{array}{l} f(x+h) = 5(x+h) + (x+h)^2 + 1 \\ f(x) = 5x + x^2 + 1 \end{array} \right] =$$

$h=0$ är odefinierat

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5(x+h) + (x+h)^2 + 1 - (5x + x^2 + 1)}{h} = \left[\begin{array}{l} (x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^2 \\ - \text{framför } () \Rightarrow \\ \text{Byt tecken inuti} \end{array} \right]$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5x + 5h + x^2 + 2hx + h^2 + 1 - 5x - x^2 - 1}{h} = \left[\begin{array}{l} \text{Förenkla} \\ \text{täljaren} \end{array} \right] =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5h + 2hx + h^2}{h} = \left[\begin{array}{l} \text{Bryt ut} \\ h \end{array} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(5 + 2x + h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} 5 + 2x + h = \left[\begin{array}{l} \text{Sätt in} \\ h=0 \end{array} \right] = \underline{5 + 2x}$$

21. Undersök för vilka värden på konstanten C som uttrycket nedan kan förenklas

(0/1/2)

$$\frac{x^3 - 5x^2 + Cx}{2x^2 - 8x + 6}$$

Uttrycket kan förenklas om samma faktorer finns i såväl täljare som nämnare.

Faktorisera nämnaren:

$$2(x^2 - 4x + 3) = \left[\begin{array}{l} \text{Pq} \\ \text{2} \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} 2 \cdot 2 - 3 \\ \text{1} \end{array} \right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \end{array} = 2(x-3)(x-1)$$

Faktorisera täljaren (så långt det går):

$$x^3 - 5x^2 + Cx = x(x^2 - 5x + C)$$

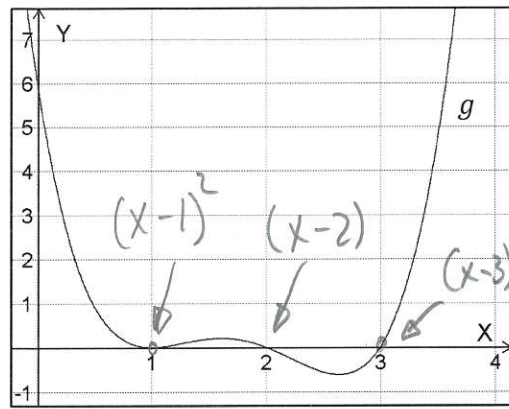
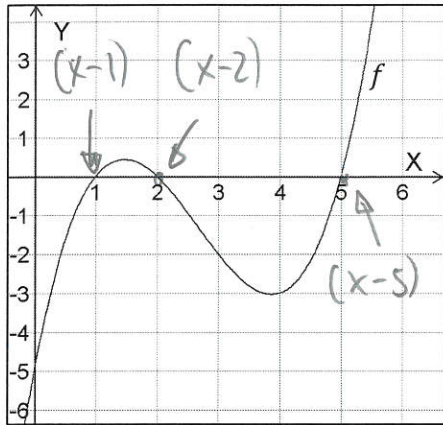
Om $(x-3)$ ska vara en faktor gäller att $x=3$ ger svaret 0

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \end{array} \right] \quad 3^2 - 5 \cdot 3 + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = 6$$

på samma sätt med $(x-1)$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \end{array} \right] \quad 1^2 - 5 \cdot 1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 4$$

22. I de två koordinatsystemen nedan har graferna till de två polynomfunktionerna f och g ritats.



Förenkla det rationella uttrycket $\frac{f}{g}$ så långt som möjligt

(0/0/2)

f i faktorform: $a \cdot (x-1)(x-2)(x-5)$
där a fås via t.ex punkten $(0, -5)$

$$a \cdot (0-1)(0-2)(0-5) = -5$$

$$a \cdot (-10) = -5$$

$$a = 0,5$$

$$f = 0,5(x-1)(x-2)(x-5)$$

g i faktorform: $b \cdot (x-1)^2(x-2)(x-3)$
där b fås via t.ex punkten $(0, 6)$

$$b \cdot 1 \cdot (-2) \cdot (-3) = 6 \Rightarrow b = 1$$

$$g = 1 \cdot (x-1)^2(x-2)(x-3)$$

$$\frac{f}{g} = \frac{0,5(x-1)(x-2)(x-5)}{1 \cdot (x-1)^2(x-2)(x-3)} = \frac{0,5(x-5)}{(x-1)(x-3)}$$