FACIT

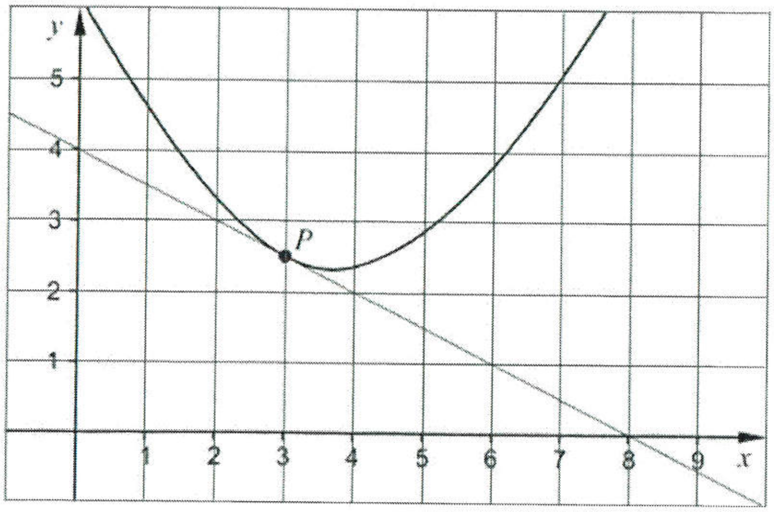
Tangent och derivata

Del 1 – Utan digitalt hjälpmedel

1. Nedanstående uppgift är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften.

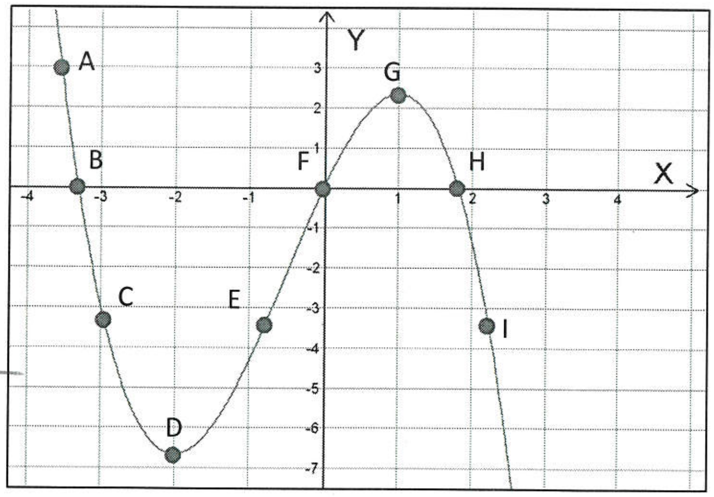
Figuren visar grafen till en funktion och dess tangent i punkten P.
Vilket värde har funktionens derivata i punkten P? (1/0/0)

Endast svar fordras



Derivatan ges av tangentens lutning,
2 rutor åt höger
1 ruta ned
$\Rightarrow k = -\frac{1}{2}$

2. Figuren till höger visar tredjegradsfunktionen f med punkterna A – I markerade. Vid vilken eller vilka punkter gäller att…



a) $f' > 0$ (1/0/0)

"Punkter med positiv lutning" E, F

b) $f = 0$ (1/0/0)

"Punkter med y-värdet noll" B, F, H

c) $f' = 0$ (1/0/0)

"Punkter med lutningen noll" D, G

d) $f > 0$ och $f' < 0$ samtidigt. (0/1/0)

"Punkter med positivt y-värde och neg. lutning" A

3. Derivera polynomen

a) $f(x) = x^5 + 4x$ (1/0/0)

$f'(x) = 5x^4 + 4\cdot 1 = 5x^4 + 4$

b) $f(x) = \frac{x}{\boxed{3}} - 5$ (1/0/0)

Nämnaren följer med

$f'(x) = \frac{1}{\boxed{3}} - 0 = \frac{1}{3}$

c) $f(x) = x^{12} + \frac{2x^9}{\boxed{9}} + 4x$ (1/0/0)

$f'(x) = 12x^{11} + \frac{2\cdot 9x^8}{\boxed{9}} + 4\cdot 1 = 12x^{11} + 2x^8 + 4$

Nämnaren följer med

d) $f(x) = (2x - 4)^2$ (1/1/0)

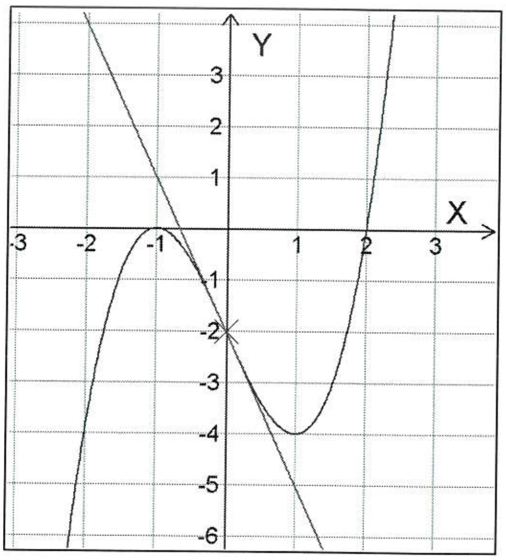
Utveckla först, derivera sedan.

$f(x) = (2x-4)^2 = (2x-4)(2x-4) = 4x^2 - 8x - 8x + 16$

$f'(x) = 4\cdot 2\cdot x - 8\cdot 1 - 8\cdot 1 + 0 = 8x - 16$

4. Figuren till höger visar funktionen f med en tangent inritad i punkten där $x = 0$

Använd figuren för att svara på frågorna nedan. *Endast svar krävs!*



a) Bestäm $f(0)$ (1/0/0)

"y-värdet då $x=0$" -2

b) Bestäm $f'(0)$ (1/0/0)

"Lutningen då $x=0$" (fås av tangenten) -3

c) Bestäm $f'(1)$ (1/0/0)

"Lutningen då $x=1$" 0

d) Bestäm derivatans *nollställen* (1/0/0)

"Vilka x har derivatan noll?"

Vändpunkternas x-värden $\Rightarrow$ $x_1 = -1$, $x_2 = 1$

5. Bestäm *lutningen* av grafen till funktionen $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + x + 2$ i den punkt där $x = 2$ (2/0/0)

Lutningar fås av derivatafunktionen
$\Rightarrow$ Derivera först

$f'(x) = 12x^2 - 4x + 1$

$f'(2) = 12 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 1 = 12 \cdot 4 - 8 + 1 = 48 - 8 + 1$
$= 41$

6. Bestäm ekvationen för en tangent till funktionen $f(x) = 3x^2 + 2x$ i den punkt där $x = 2$ (2/1/0)

$f'(x) = 6x + 2$

För ekv. av en rät linje krävs en punkt och lutningen.

Lutningen $= f'(2) = 6 \cdot 2 + 2 = 14$
Y-värdet $= f(2) = 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 = 16$

$\Rightarrow \boxed{(2, 16) \quad k = 14}$

m-värdet: $2 \cdot 14 + m = 16 \Rightarrow m = -12$

Tangentens ekv.
$y = 14x - 12$

7. Utgå från funktionerna $f(x) = x^3 - \cancel{6x}\,x^2 + \cancel{1}2x$ och $g(x) = 2x^2 - 16x + 32$.

a) Visa att funktionernas grafer skär varandra då $x = 2$ (2/0/0)

Skär varandra $\Rightarrow$ Samma y-värde vid samma x.

$y_1 = f(2) = 2^3 - 2^2 + 2 \cdot 2 = 8$

$y_2 = g(2) = 2 \cdot 2^2 - 16 \cdot 2 + 32 = 8$

Graferna skär varandra i punkten $(2, 8)$

b) Undersök om grafernas lutning är densamma då $x = 2$. (1/1/0)

Lutningarna ges av resp. derivatafunktion

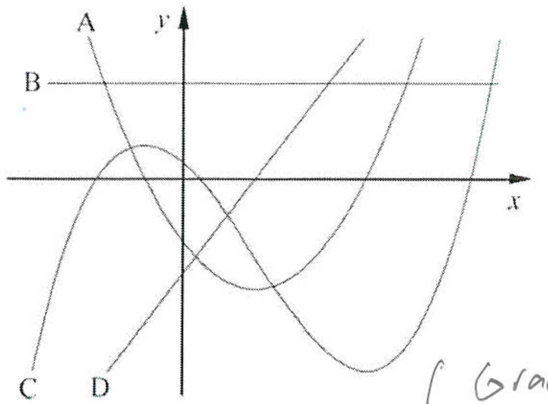
$f'(x) = 3x^2 - 2x + 2$ $\qquad f'(2) = 3 \cdot 4 - 4 + 2 = 10$

$g'(x) = 4x - 16$ $\qquad g'(2) = 4 \cdot 2 - 16 = -8$

Grafernas lutning är INTE samma vid $x = 2$. $(10 \neq -8)$

8. Nedanstående uppgift är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften.

Figuren visar graferna till fyra funktioner p, q, r och s.



A: ∪ = Grad 2

B = — = Grad 0

C = ∩∪ = Grad 3

D = / = Grad 1

(Graden minskar vid derivering)

Funktionen p är en polynomfunktion av tredje graden. De andra funktionerna har bildats genom upprepad derivering av p, det vill säga:

$q(x) = p'(x)$

$r(x) = q'(x)$

$s(x) = r'(x)$

p = Högst grad = C
q = ⋮ = A
r = = D
s = Lägst grad = B

Para ihop funktionerna p, q, r och s med tillhörande graf A, B, C och D.

Endast svar fordras (0/1/0)

p: C q: A r: D s: B

9. Skriv ett valfritt funktionsuttryck, $f(x)$, för vilket det gäller att…

a) $f(0) = 3$ (1/0/0)

"y-värdet då x=0 ska vara 3"

ex: $f(x) = 4x + 3$

b) $f'(1) = 2$ (0/1/0)

"Lutningen då x=1 ska vara 2"

ex: $f(x) = 2x + 8$

c) $f(1) = 1$ och $f'(2) = 2$ samtidigt (0/2/0)

"Lutningen då x=2 är 2
y-värdet då x=1 är 1"

ex: $f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}$

10. Funktionen $f = x^3 - 9x^2 + 24x - 21$ har två vändpunkter.
Bestäm koordinaterna för dessa båda punkter. (1/3/0)

Vändpunkter $\Rightarrow f' = 0$

$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 18x + 24 = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0$

"p-q": Δ $+3$ $\quad 3 \cdot 3 - 8$ $\quad x_1 = 4$

$\boxed{1}$ $\quad x_2 = 2$

y-värden: $f(2) = 2^3 - 9 \cdot 2^2 + 24 \cdot 2 - 21 = 8 - 36 + 48 - 21 = -1 \Rightarrow (2, -1)$

$f(4) = 4^3 - 9 \cdot 4^2 + 24 \cdot 4 - 21 = 64 - 9 \cdot 16 + 96 - 21 =$
$= 64 - 144 + 96 - 21 = -5 \Rightarrow (4, -5)$

11. I funktionen nedan är a, b och c positiva konstanter.
Derivera funktionen (0/1/1)

$$f(x) = \frac{ax^{b+1} + x^{c-1}}{x} = \left[\text{Skriv om som två bråk}\right] = \frac{a \cdot x^{b+1}}{x^1} + \frac{x^{c-1}}{x^1} =$$

$$= \left[\text{Potenslag } \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}\right] = a \cdot x^{b+1-1} + x^{c-1-1} = a \cdot x^b + x^{c-2}$$

Deriveras detta uttryck fås: $f'(x) = a \cdot b \cdot x^{b-1} + (c-2)x^{c-3}$

12. För funktionen f gäller att:

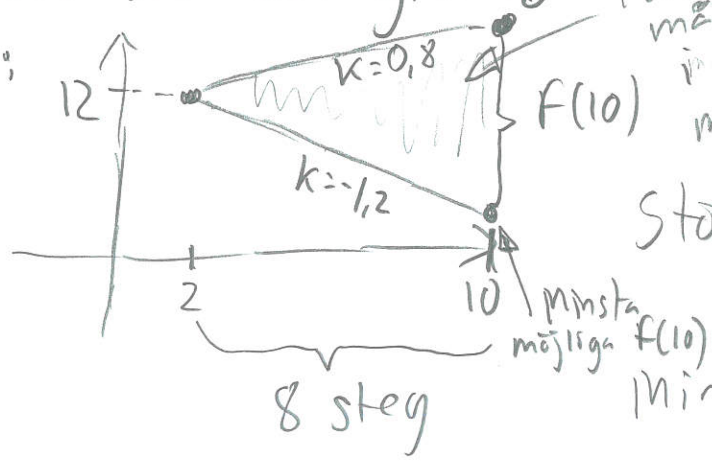
$f(2) = 12$

$-1{,}2 \leq f'(x) \leq 0{,}8$ för alla x

Största möjliga f(10)

Bestäm största och minsta möjliga värde för $f(10)$ (0/1/1)

En skiss av den givna infon:



Funktionen måste vara i området mellan

Största: $12 + 8 \cdot 0{,}8 =$
$= 12 + 6{,}4 = 18{,}4$

Minsta $12 - 8 \cdot 1{,}2 =$
$= 12 - 9{,}6 = 2{,}4$

Del 2 – Med digitalt hjälpmedel

D1. En boll kastas rakt upp i luften. Höjden över marken, h meter, som bollen befinner sig på efter att ha varit i luften i x sekunder ges av funktionen

$$h(x) = 12x - 5x^2 + 1{,}5$$

Bestäm värdet av $h'(1)$ och tolka resultatet. (2/0/0)

$h'(x) = 12 - 10x$

$h'(1) = 12 - 10 \cdot 1 = 2$

Efter 1 sekund har bollen hastigheten 2 m/s

D2. Använd det digitala hjälpmedlets deriveringsfunktion och bestäm ett värde på

$f'(3)$ om $f(x) = x \cdot 2^x$

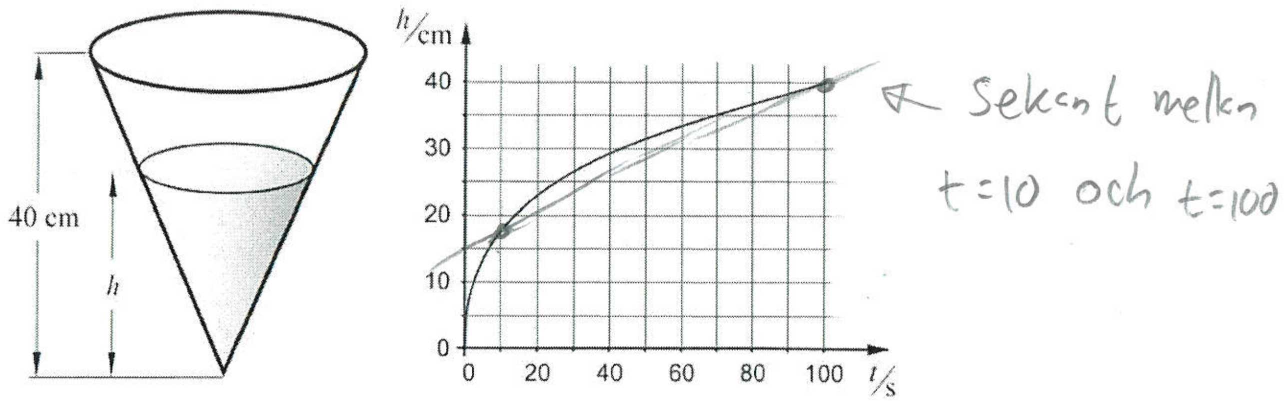
ex nDeriv( )

Svara med 3 decimaler! (1/0/0)

nDeriv (X*2^X, X, 3) ≈ 24,636

D3. Nedanstående uppgift är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften.

En konisk behållare fylls med vatten. Diagrammet visar hur vattennivåns höjd h i centimeter beror av tiden t i sekunder.



a) Det tar 100 sekunder att fylla behållaren. Med vilken medelhastighet ökar vattennivåns höjd h under tidsperioden $10 \le t \le 100$? (2/0/0)

b) Tolka vad $h'(50) = 0{,}20$ betyder i detta sammanhang, det vill säga då konen fylls med vatten. (1/1/0)

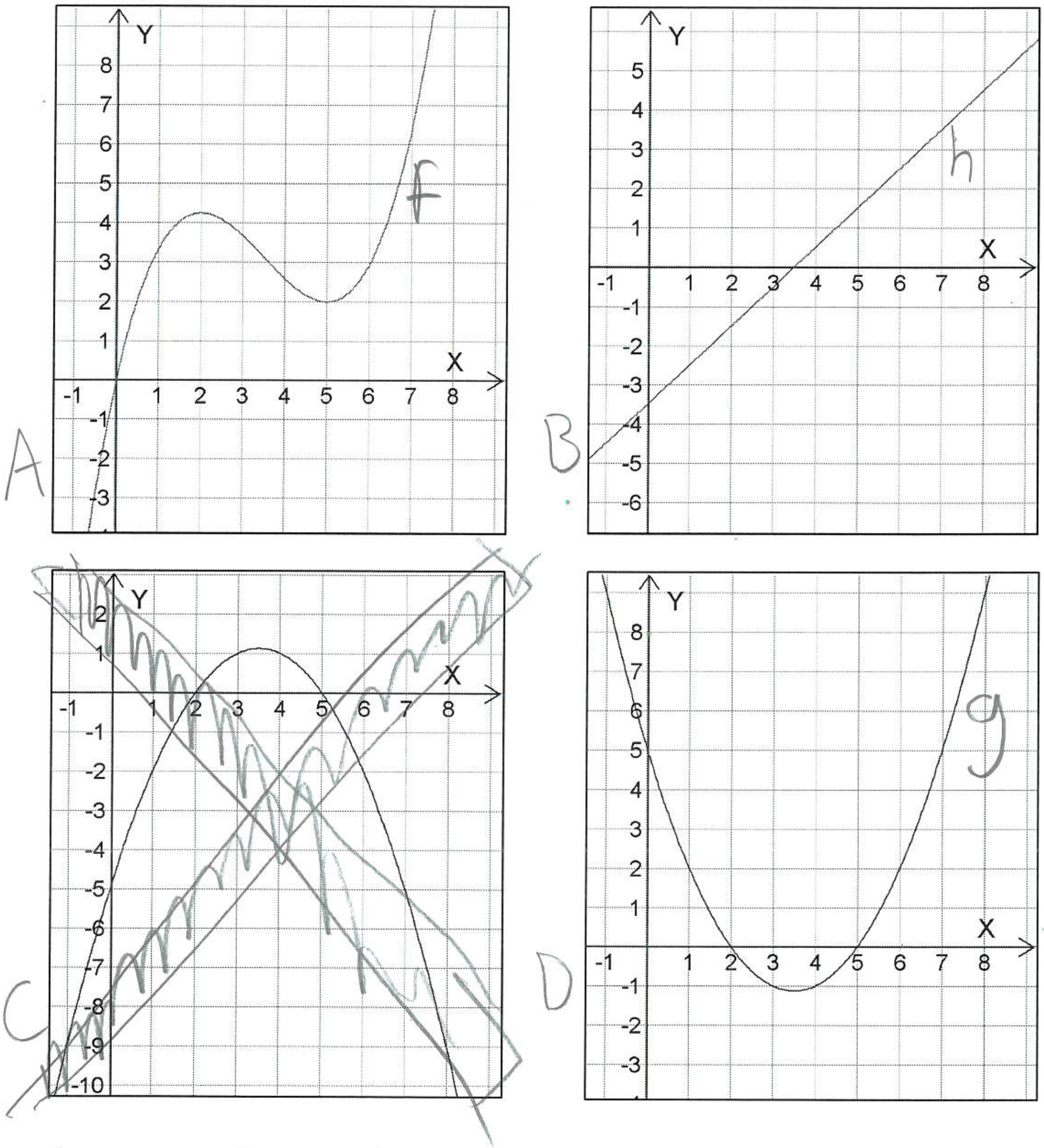
a) medel hastighet ⇒ Ändringskvoten =

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{40 - 17{,}5}{100 - 10} = \frac{22{,}5}{90} = 0{,}25 \text{ cm/s}$$

b) "$h'(50)=0{,}20$" ⇒ Hastigheten som vattennivån ökar med är 0,20 cm/s efter precis 50 s

D4. Bilderna nedan visar graferna till fyra polynomfunktioner. TRE av dessa är funktionerna f, g och h. Dessa är varandras derivatafunktioner så att $g = f'(x)$ och $h = g'(x)$

Bestäm värdet av $f'(6) + h'(3)$ (0/1/2)



f = Tredjegradaren

$g = f'$ = En av andragradarna $\Rightarrow$ En av dem är falsk.

$h = g'$ = Förstagradaren

Enligt grafen är $f'(1)$ positiv $\Rightarrow$ graf D sann.

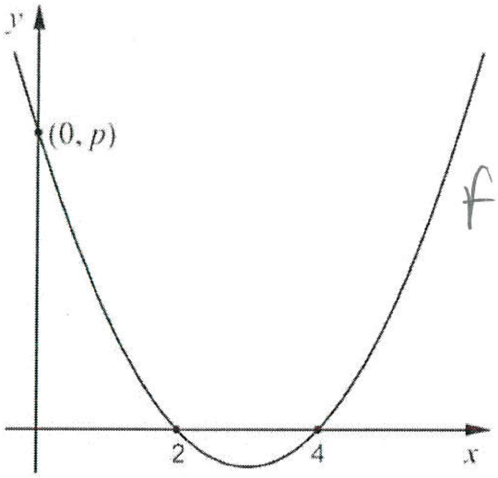
$f'(6) = g(6) = \left[\text{Enl. graf D}\right] = 2$

$h'(3)$ = Lutningen av den räta linjen $= 1$ (oavsett x-värde)

$f'(6) + h'(3) =$
$= 2 + 1 = 3$

D5. Nedanstående uppgift är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften.

Nedan visas grafen till en andragradsfunktion som har nollställena $x_1 = 2$ och $x_2 = 4$, se figur. Grafen skär y-axeln i punkten $(0, p)$.



Anta att vi drar en tangent till grafen i punkten $(0, p)$. Bestäm lutningen för denna tangent uttryckt i p. (0/1/2)

För att få tangentens lutning krävs derivatan.
För derivatan krävs funktionsuttrycket i utvecklad form
För funktionsuttrycket i utvecklad form krävs faktor form:

1. Faktor form $f(x) = a\cdot(x-2)(x-4)$ punkten $(0,p) \Rightarrow$

$a\cdot(0-2)(0-4) = p \Rightarrow$

$8a = p \Rightarrow a = \frac{p}{8}$

$\frac{p}{8}(x-2)(x-4)$

2. Utvecklad form: $\frac{p}{8}(x^2-4x-2x+8) = \frac{p}{8}x^2 - \frac{6p}{8}x + p$

3. Derivera $f'(x) = \frac{2p}{8}x - \frac{6p}{8} = \frac{px}{4} - \frac{3p}{4}$

4. Tangentens lutning $k = f'(0) = \frac{p\cdot 0}{4} - \frac{3p}{4} = -\frac{3p}{4}$