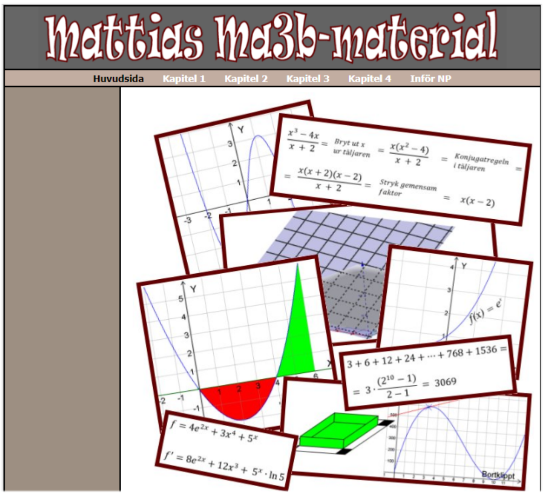


2.2 - Tangent och derivata

Begreppet derivata

Vad menas med begreppet derivata?

Förändringshastigheten vid ett tillfälle

Grafiskt motsvarar detta lutningen vid ett "ställe" på grafen

Beteckning: Funktionens namn med en apostrof "prim" $f'(x)$ Jmf med $f(x)$ som ger y-värdet

Exempel 1: Figuren nedan visar grafen till funktionen f

Bestäm med hjälp av figuren om nedanstående värden är positiva, negativa eller har värdet noll. ( ) x-värdet

a) $f(1)$

"y-värdet vid x=1" Neg.

b) $f'(3)$

"lutningen vid x=3" Pos

c) $f'(-1)$

Noll

"lutningen vid x=-1"

d) $f'(5)$

"lutningen vid x=5" Neg

e) $f(5)$

"y-värdet vid x=5" Pos.

f) $f'(-2)$

"lutningen vid x=-2" Pos.

Tangenter

Vad menas med begreppet tangent?

En rät linje som uppfyller två egenskaper

* Går igenom en punkt på grafen
* Har samma lutning som grafen i punkten.

Exempel 2: Figuren nedan visar grafen till en tredjegradsfunktion med en inritad tangent.
Bestäm med hjälp av figuren följande värden

a) f '(5)

"lutningen" Noll

b) f (5)

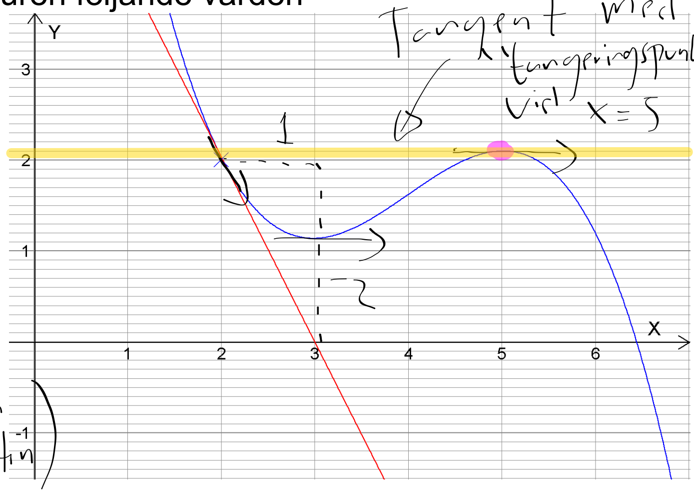
("y-värdet" 2,1

c) f '(3)

"lutningen" ≈ Noll

d) f '(2)

"lutningen" = −2 (fås via tangenten)



e) Rita en egen tangent med tangeringspunkt vid x = 5

Derivatan hos polynom

Derivator kan bestämmas med hjälp av s.k. deriveringsregler:

$\boxed{f(x) = \ldots \text{ y-värden}} \xrightarrow{\text{"Derivera"}} \boxed{f'(x) = \ldots \text{ Lutningen}}$

Ex: $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 5$

Deriveringsregler:

* Antalet termer är desamma; $f'(x) = \underset{(1)}{\_} + \underset{(2)}{\_} - \underset{(3)}{\_} + \underset{(4)}{\_}$
* "Gångersiffror" följer med; $f'(x) = \underset{(1)}{\_} + 2\underset{(2)}{\_} - \underset{(3)}{\_} + \underset{(4)}{\_}$
* x upphöjt till "huggs sönder"

$$f'(x) = 3x^2 + 2 \cdot 2 \cdot x^1 - 1 + 0$$

* x utan exp. har derivatan 1
* konstanttermer har derivatan 0

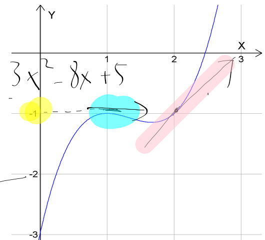
y-värden

Exempel 3: Figuren nedan visar grafen till funktionen $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 3$

Bestäm algebraiskt värdet på

y: $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 3$

Lutning: $f'(x) = 3x^2 - 4 \cdot 2 \cdot x + 5 \cdot 1 - 0 = 3x^2 - 8x + 5$



a) f(1)

Byt ut x mot 1 i y-värdesfunk.

$f(1) = 1^3 - 4 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 - 3 = -1$

b) f'(1)

Byt ut x mot 1 i lutningsfunk.

$f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 8 \cdot 1 + 5 = 0$

Använd grafen för att kontrollera dina svar!

c) f'(2)

Byt ut x mot 2 i lutningsfunk.

$f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 + 5 = 12 - 16 + 5 = 1$

Exempel 4: Ta fram ekvationen för en tangent till funktionen $f(x) = x^2 + 3x - 2$ i den punkt där $x = 2$

Jmf med Ma 2: $\boxed{(\;,\;) \; k=} \rightarrow \boxed{k \cdot x + m = y}$

Vi behöver punkten och k-värdet

$\boxed{(2, 8) \; k = 7}$

y-värdet fås ur y-värdesf.

$y = f(2) = 2^2 + 3 \cdot 2 - 2 =$

$= 4 + 6 - 2 = 8$

k-värdet fås via lutningsf.

Derivera: $f(x) = x^2 + 3x - 2$

$f'(x) = 2x^1 + 3 \cdot 1 - 0$

$= 2x + 3$

$k = f'(2) = 2 \cdot 2 + 3 = 7$

$\boxed{(2, 8) \; k = 7} \rightarrow$ $k \cdot x + \ldots = y$

$7 \cdot 2 \quad = 8$

$14 - 6 = 8$

Tangentens ekv: $y = 7 \cdot x - 6$

$$x^5 \longrightarrow 5 \cdot x^4$$

Polynomens "derivatasläktträd"

Alla polynom har "derivatabarn" och är själva derivatafunktioner till något annat polynom.

dvs som ett släktträd:

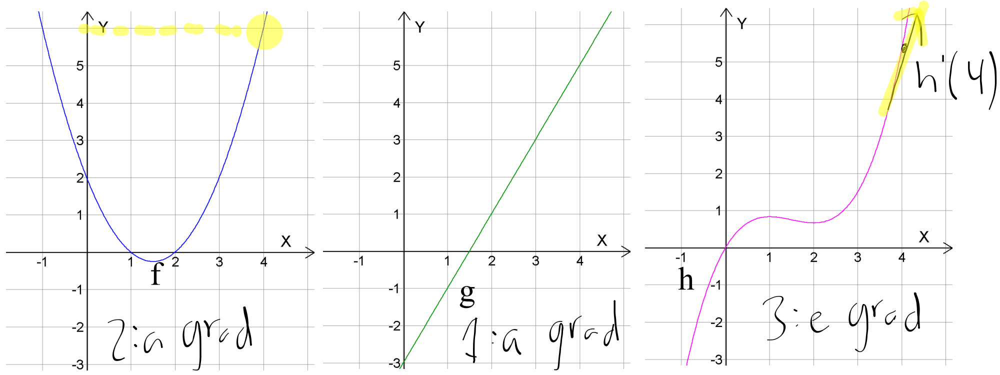
...
↓
Mamma
↓
Barn
↓
Barnbarn
↓
...

Femtegradare
↓ Derivering
Fjärdegradare
↓
Tredjegradare
↓
...

Exempel 5: Figuren nedan visar graferna till tre funktioner, f, g, h, som är derivatafunktioner till varandra.

a) Skriv funktionerna i rätt ordning, dvs ange vilken som är derivata till vilken.

b) Bestäm $h'(4)$



a) 3:e grad → 2:a grad → 1:a grad

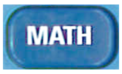
$h \rightarrow f \rightarrow g$

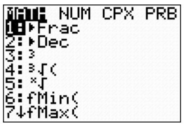
b) $h'(4) =$ "Lutningen till h då $x = 4$"

$= f(4) = 6$

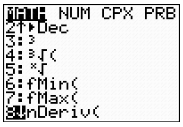
Derivering med digitala verktyg

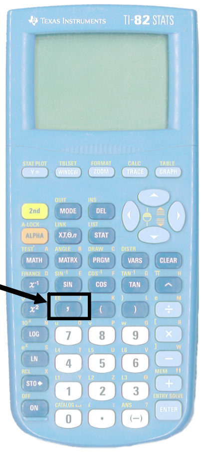
Miniräknaren (TI-82):





välj alternativ 8





nDeriv(Funktion, X, x-värde)

, skrivs med

Geogebra:

Skriv in en funktion, t.ex x^3

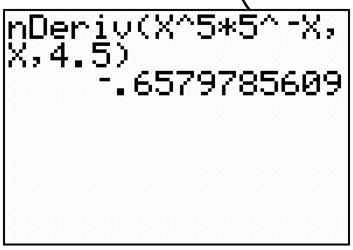
Geogebra namnger då funktionen. Den första heter f(x), den andra heter g(x) osv

För att bestämma ett derivatavärde skriv:

namnet ' (x-värdet), t.ex f ' (3)

Exempel 6: Använd valfritt digitalt verktyg och bestäm värdet av derivatan till funktionen $f(x) = x^5 \cdot 5^{-x}$ i den punkt där $x = 4{,}5$

Miniräknaren: nDeriv( )

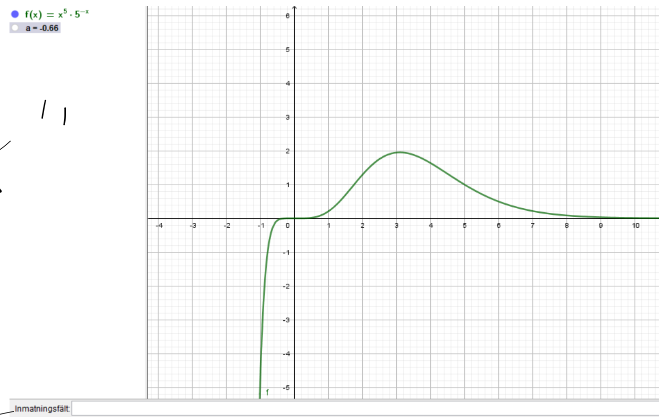


Geogebra:

"X^5*5^-X"

"f'(4,5)"

a = -0,66



Derivatan