FACIT

Derivatans definition

Del 1 – Utan digitalt hjälpmedel

1. För en funktion, f, gäller följande:

$f(2{,}1) = 7$
$f(1{,}9) = 5{,}8$

Uppskatta med hjälp av dessa data ett värde på $f'(2)$ (0/1/0)

Central ändringskvot: $f'(2) \approx \dfrac{f(2{,}1) - f(1{,}9)}{0{,}2} = \dfrac{7-5{,}8}{0{,}2} = \dfrac{1{,}2}{0{,}2} = 6$

2. Lotten önskar bestämma $f'(3)$ till funktionen $f(x) = \sqrt{x}$ och föreslår då beräkningen

$$f'(3) \approx \frac{\sqrt{3{,}01} - \sqrt{2{,}99}}{0{,}02} \Rightarrow h = 0{,}01$$

Föreslå en annan beräkning som ger ett ännu bättre värde på $f'(3)$ (0/1/0)

Minska avståndet mellan punkterna (h), t.ex $h = 0{,}001$

$$\Rightarrow f'(3) \approx \frac{\sqrt{3{,}001} - \sqrt{2{,}999}}{0{,}002}$$

3. Teckna valfri ändringskvot som kan användas för att bestämma derivatan i den punkt där $x = 1$ för funktionen $f(x) = x^2 + x$ Välj valfritt litet värde på h (0/1/0)

Central: $f'(1) \approx \dfrac{(1+h)^2 + (1+h) - (1-h)^2 - (1-h)}{2h}$

Högerställd $f'(1) \approx \dfrac{(1+h)^2 + (1+h) - 1^2 - 1}{h}$

4. Visa med hjälp av derivatans definition att derivatafunktionen till funktionen $f(x) = kx$ är k (0/2/0)

Högerställd: $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \left[\begin{array}{l} f(x) = kx \\ f(x+h) = k(x+h) \end{array}\right] =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{k(x+h) - kx}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\cancel{kx} + kh - \cancel{kx}}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{kh}{h} = \lim\limits_{h \to 0} k = k$

5. Uppgiften nedan är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften.

Nedan ges derivatans värde hos en funktion f i en given punkt P.

$$\lim_{h\to 0}\frac{\overbrace{((2+h)^5+3)}^{f(x+h)}-\overbrace{(2^5+3)}^{f(x)}}{h}=80$$

a) Ange funktionen f *Endast svar fordras* (0/1)

b) En tangent dras i punkten P. Bestäm tangentens ekvation. (0/2)

a) Jmf med högerställd derivata: $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$f(x)=x^5+3$ med x-värdet 2

b) Enl. a) är x-värdet 2 $\Rightarrow$ $y=f(2)=2^5+3=35$

$k=f'(2)=\xrightarrow{\text{svaret på gränsvärdet}} 80$

$\xrightarrow{\text{derivera själv}} \begin{bmatrix} f'(x)=5x^4 \\ f'(2)=5\cdot 2^4 \end{bmatrix}=80$

$\boxed{\begin{matrix}(2,35)\\ k=80\end{matrix}} \Rightarrow 80\cdot 2 \;\; = 35 \;\; -125 \Rightarrow$ Tangentens ekv.: $y=80x-125$

6. Visa med hjälp av derivatans definition att derivatafunktionen till funktionen $f(x)=Ax^2$ är $2Ax$ (0/2/0)

Högerställd: $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\begin{bmatrix} f(x)=Ax^2 \\ f(x+h)=A(x+h)^2 \end{bmatrix}=$

$=\lim_{h\to 0}\frac{A(x+h)^2-Ax^2}{h}=\begin{bmatrix}(x+h)^2= \\ =x^2+2xh+h^2\end{bmatrix}=\lim_{h\to 0}\frac{A(x^2+2xh+h^2)-Ax^2}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{Ax^2+2Axh+Ah^2-Ax^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2Axh+Ah^2}{h}=$

$=\begin{bmatrix}\text{Bryt ut} \\ Ah\end{bmatrix}=\lim_{h\to 0}\frac{Ah(2x+h)}{\cancel{h}}=\lim_{h\to 0}A(2x+h)=2Ax$

7. Bestäm ett närmevärde på $f'(4)$ till funktionen $f(x) = \sqrt{x-1}$ med hjälp av följande värden: (0/1/1)

$\sqrt{1{,}9} \approx 1{,}38$	$\sqrt{3{,}9} \approx 1{,}97$
$\sqrt{2{,}1} \approx 1{,}45$	$\sqrt{4{,}1} \approx 2{,}02$
$\sqrt{2{,}9} \approx 1{,}70$	$\sqrt{4{,}9} \approx 2{,}21$
$\sqrt{3{,}1} \approx 1{,}76$	$\sqrt{5{,}1} \approx 2{,}26$

Central ändringskvot: $f'(4) \approx \frac{f(4+h) - f(4-h)}{2h} = \left[\begin{matrix}\text{Enl. de givna värdena:}\\ h = 0{,}1\end{matrix}\right] =$

$= \frac{\sqrt{4+0{,}1-1} - \sqrt{4-0{,}1-1}}{0{,}2} = \frac{\sqrt{3{,}1} - \sqrt{2{,}9}}{0{,}2} =$

$= \left[\begin{matrix}\sqrt{3{,}1} \approx 1{,}76\\ \sqrt{2{,}9} \approx 1{,}70\end{matrix}\right] = \frac{1{,}76 - 1{,}70}{0{,}2} = \frac{0{,}06}{0{,}2} = 0{,}3$

8. Daniel Derivata använder derivatans definition för att derivera en funktion. Daniel ställer helt korrekt upp gränsvärdet nedan:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\overbrace{(4+h)^3 - (4+h)^2}^{f(x+h)} - \overbrace{(4^3 - 4^2)}^{f(x)}}{h}$$

a) Använd deriveringsregler för att förutsäga svaret på Daniels beräkning ovan (0/0/1)

Jmf med högerställd derivata: $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \Rightarrow \begin{matrix} f(x+h) = (4+h)^3 - (4+h)^2 \\ f(x) = 4^3 - 4^2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} f = x^3 - x^2 \\ x = 4 \end{matrix}$

Med funk. uttrycket för $f(x)$ givet: $f(x) = x^3 - x^2 \Rightarrow$ återstår derivering $\begin{matrix} f'(x) = 3x^2 - 2x \\ f'(4) = 48 - 8 = 40 \end{matrix}$

b) Bestäm Daniels uppställda gränsvärde genom att förenkla så långt som möjligt (0/1/2)

$\lim_{h \to 0} \frac{(4+h)^3 - (4+h)^2 - (4^3 - 4^2)}{h} = \left[\begin{matrix}(4+h)^2 = 4^2 + 8h + h^2\\ (4+h)^3 = (4+h)^2 \cdot (4+h) = (4^2 + 8h + h^2)(4+h)\end{matrix}\right]$

$= \lim_{h \to 0} \frac{4^3 + 32h + 4h^2 + 4^2h + 8h^2 + h^3 - (4^2 + 8h + h^2) - 4^3 + 4^2}{h} = \left[\begin{matrix}\text{- framför}\\ (\ )\end{matrix}\right]$

$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{4^3} + 32h + 12h^2 + 16h + h^3 - \cancel{4^2} - 8h - h^2 - \cancel{4^3} + 4^2}{h} = \left[\text{Förenkla}\right]$

$= \lim_{h \to 0} \frac{40h + 11h^2 + h^3}{h} = \left[\begin{matrix}\text{Bryt ut}\\ h\end{matrix}\right] = \lim_{h \to 0} \frac{h(40 + 11h + h^2)}{h} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{sätt in}\\ h=0}}{=} 40 + 0 + 0 = 40$

9. Uppgiften nedan är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften.

Bestäm derivatan till $f(x)=\frac{A}{x}$ med hjälp av derivatans definition. (0/2/2)

Högerställd: $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \left[\begin{array}{l} f(x)=\frac{A}{x} \\ f(x+h)=\frac{A}{x+h}\end{array}\right] = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{A}{x+h}-\frac{A}{x}}{h} =$

$= \left[\begin{array}{l}\text{Skriv täljaren} \\ \text{på gemensamt} \\ \text{bråkstreck}\end{array}\right] = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{Ax-A(x+h)}{(x+h)\cdot x}}{h} = \left[\begin{array}{l}\text{Förenkla} \\ \text{täljaren}\end{array}\right] =$

$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{Ax-Ax-Ah}{(x+h)x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{-Ah}{(x+h)\cdot x}}{h} = \left[\begin{array}{l}\text{Skriv som} \\ \text{ett bråk} \\ \frac{}{h} = \cdot\frac{1}{h}\end{array}\right]$

$= \lim_{h\to 0} \frac{-Ah}{(x+h)\cdot x}\cdot\frac{1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-A\cancel{h}}{(x+h)\cdot x\cdot\cancel{h}} = [h=0] = -\frac{A}{x^2}$

10. Visa att en centralt uppställd ändringskvot för **alla andragradsfunktioner** ger ett korrekt svar på derivatan oavsett värde på h (0/0/3)

Central ändringskvot: $\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} = \left[\begin{array}{l}\text{"Alla andragradsfunk."} \\ \Rightarrow f(x)=ax^2+bx+c \\ f(x+h)=a(x+h)^2+b(x+h)+c \\ f(x-h)=a(x-h)^2+b(x-h)+c\end{array}\right]$

$= \frac{a(x+h)^2+b(x+h)+c-(a(x-h)^2+b(x-h)+c)}{2h} =$

$= \left[\begin{array}{l}(x+h)^2=x^2+2xh+h^2 \\ (x-h)^2=x^2-2xh+h^2 \\ -\text{ framför } (\quad)\end{array}\right] = \frac{ax^2+2axh+ah^2+bx+bh+c-ax^2+2axh-ah^2-bx+bh-c}{2h} =$

$= \left[\text{Förenkla}\right] = \frac{4axh+2bh}{2h} = \left[\begin{array}{l}\text{Bryt ut} \\ 2h\end{array}\right] = \frac{\cancel{2h}(2ax+b)}{\cancel{2h}}$

Jmf med deriveringsregler: $f'(x)=a\cdot 2\cdot x^1+b\cdot 1=2ax+b$