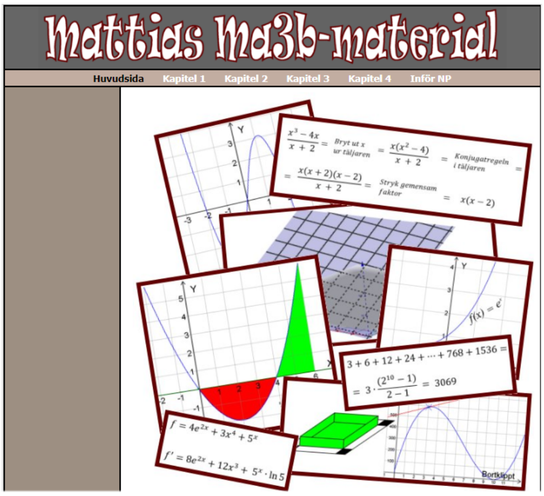


2.3 - Derivatans definition

Varifrån kom deriveringsreglerna..?

Ursprungligen i från k-värdet på "lämpliga" sekanter.

$$k = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

Punkterna (x_1, y_1) och (x_2, y_2) ligger så att punkten vi önskar veta lutningen vid ligger i mitten.

Exempel 1: Utgå från funktionen $f(x) = x^3 - 2x$

a) Teckna en lämplig ändringskvot för att bestämma ett ungefärligt värde av $f'(1)$

1:an i mitten ⇓

$$k = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{4 - 0}{2} = 2$$

$x_1 = 0$
$x_2 = 2$

b) Teckna en annan ändringskvot än den i a) som ger ett ännu bättre närmevärde på $f'(1)$

Välj punkter närmare varand

$x_1 = 1{,}5$
$x_2 = 0{,}5$

$$k = \frac{f(1{,}5) - f(0{,}5)}{1{,}5 - 0{,}5} = \frac{1{,}5^3 - 2 \cdot 1{,}5 - (0{,}5^3 - 2 \cdot 0{,}5)}{1}$$

c) Teckna en annan ändringskvot än den i b) som ger ett ytterligare lite bättre närmevärde på $f'(1)$

Sätt punkterna ännu närmare varandra,

ex $x_1 = 1{,}01$
$x_2 = 0{,}99$

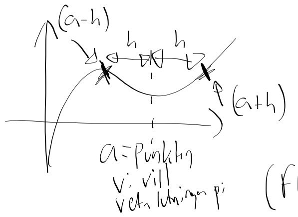
$$k = \frac{1{,}01^3 - 2 \cdot 1{,}01 - (0{,}99^3 - 2 \cdot 0{,}99)}{1{,}01 - 0{,}99}$$

Derivatans definition

Det blir bättre och bättre precision på ändringskvoten ju närmare punkterna är varandra.

Den ultimata varianten är således när punkterna är oändligt nära varandra!!

Låt h vara avståndet åt resp. håll



$$k = \frac{f(a+h) - f(a-h)}{a+h - (a-h)}$$

Låt $h \to 0$
(flytta punkterna närmare)

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$$

Exempel 2: Utgå från funktionen $f(x) = x^2$ och att uppgiften går ut på att söka värdet för $f'(2)$.

a) Teckna den allmänna ändringskvoten för två lämpliga punkter, som befinner sig på x-avståndet $2h$ från varandra.

Ena punkten: $(2+h, f(2+h))$
Andra punkten: $(2-h, f(2-h))$

$$k = \frac{f(2+h) - (f(2-h))}{2+h - (2-h)}$$

b) Bestäm gränsvärdet då h går mot noll av ändringskvoten i a)

c) Upprepa tänket, men istället för $x = 2$, låt x vara en allmän punkt. Tolka ditt svar!

b) $$\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2-h)}{2h} =$$

$\left[f(x) = x^2 \quad f(2+h) = (2+h)^2 \quad f(2-h) = (2-h)^2 \right]$

$$\lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^2 - (2-h)^2}{2h} =$$

$\left[(2+h)^2 = (2+h)(2+h) = 4 + 4h + h^2 \quad (2-h)^2 = 4 - 4h + h^2 \right]$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4 + 4h + h^2 - (4 - 4h + h^2)}{2h} =$$

$\left[\text{- framför ( ) } \Rightarrow \text{Byt tecken} \right]$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{4} + 4h + \cancel{h^2} \cancel{- 4} + 4h \cancel{- h^2}}{2h} =$$

$\left[\text{Förenkla följande} \right]$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{8h}{2h} = \lim_{h \to 0} 4 = 4$$

$\Rightarrow$ Derivatan då $x = 2$ för $f(x) = x^2$ är 4

c) På motsvarande sätt som i b)

$$\lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2 + 2xh - h^2}{2h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4xh}{2h} = 2x \Rightarrow$$

Derivatafunk. då $f(x) = x^2$ blir $f'(x) = 2x$

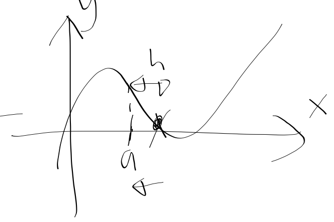
Högerställd derivata

Eftersom det ändå handlar om oändligt litet avstånd mellan punkterna, används oftast den s.k. högerställda derivatan i definitionen, som ger samma svar:

x_1 = Punkten vi söker

x_2 = Den "rörliga" punkten, h steg till höger

$$k = \frac{f(x+h) - f(x)}{x+h - x}$$



Exempel 3: Använd derivatans definition (med högerställd derivata) för att bestämma derivatafunktionen till funktionen $f(x) = x^2 + 2x - 3$

Högerställd $\Rightarrow$ $k = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{x+h-x}$

Derivatan $\Rightarrow$ punkterna närmar sig varandra $\Rightarrow$ $h \to 0$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} k = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{x+h-x}$$

$$= \left[\begin{array}{l} f(x) = x^2 + 2x - 3 \\ f(x+h) = (x+h)^2 + 2(x+h) - 3 \end{array} \right] =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 + 2(x+h) - 3 - (x^2 + 2x - 3)}{h} =$$

$$= \left[\begin{array}{l} (x+h)^2 = (x+h)(x+h) = x^2 + 2xh + h^2 \\ 2(x+h) = 2x + 2h \quad \boxed{- \text{ framför ( ) } \Rightarrow \text{ byt tecken}} \end{array} \right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2xh + h^2 + \cancel{2x} + 2h \cancel{-3} \cancel{-x^2} \cancel{-2x} \cancel{+3}}{h}$$

$$= \left[\text{Jösses! Förenkla täljaren} \right] =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2 + 2h}{h} = \left[\text{Skriv täljaren i faktorform} \right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(2x + h + 2)}{\cancel{h}} = \left[\text{Förkorta bort } h \right]$$

$$= \lim_{h \to 0} 2x + h + 2 = \left[\text{Sätt } h = 0 \right]$$

$$= 2x + 0 + 2 = 2x + 2$$

Puh! För funktionen $f(x) = x^2 + 2x - 3$ är derivatafunktionen $f'(x) = 2x + 2$