FACIT

Deriveringsregler I – potensfunktioner

Del 1 – Utan digitalt hjälpmedel

1. Derivera funktionerna nedan ⇒ Minskning med 1 från −3 till −4

a) $f(x) = x^{-3} - 2x$ (1/0/0)

$f'(x) = -3 \cdot x^{-4} - 2 \cdot 1 = -3x^{-4} - 2$

b) $f(x) = 2x^{0,4} + 4$ (1/0/0)

Minskning med 1
$0,4 - 1 = -0,6$

$f'(x) = 2 \cdot 0,4 \cdot x^{-0,6} + 0 = 0,8x^{-0,6}$

2. Skriv funktionerna nedan på potensform

a) $f(x) = 2\sqrt{x}$ $= \left[\sqrt{\ } = (\ )^{0,5}\right] = 2 \cdot x^{0,5}$ (1/0/0)

b) $f(x) = \frac{3}{x^2}$ $= \left[\frac{1}{(\ )^2} = (\ )^{-2}\right] = 3 \cdot x^{-2}$ (1/0/0)

c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ $= \left[\sqrt{x} = x^{0,5}\right] = \frac{1}{x^{0,5}} = \left[\frac{1}{(\ )^{0,5}} = (\ )^{-0,5}\right] = x^{-0,5}$ (0/1/0)

3. Derivera funktionerna nedan

Skriv först om till potensform.
Derivera sedan potensformen.

a) $f(x) = 4\sqrt{x}$ (0/1/0)

$f(x) = 4\sqrt{x} = \left[\sqrt{\ } = (\ )^{0,5}\right] = 4x^{0,5}$ ← OBS! Oderiverad!

$f'(x) = 4 \cdot 0,5 \cdot x^{-0,5} = 2 \cdot x^{-0,5} = \frac{2}{\sqrt{x}}$

b) $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$ (0/1/0)

$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x} = \left[\frac{1}{(\ )^1} = (\ )^{-1}\right] = \frac{x}{2} + 2 \cdot x^{-1}$ ← OBS! Oderiverad!

$f'(x) = \frac{1}{2} + 2 \cdot (-1) \cdot x^{-2} = \frac{1}{2} - 2 \cdot x^{-2} = \frac{1}{2} - \frac{2}{x^2}$

c) $f(x) = \frac{1}{2x\sqrt{x}}$ (0/2/0)

$f(x) = \frac{1}{2x\sqrt{x}} = \left[\sqrt{\ } = (\ )^{0,5}\right] = \frac{1}{2x \cdot x^{0,5}} = \left[x \cdot x^{0,5} = x^{1,5}\right] = \frac{1}{2x^{1,5}} = \frac{x^{-1,5}}{2}$

↑ OBS! Oderiverad!

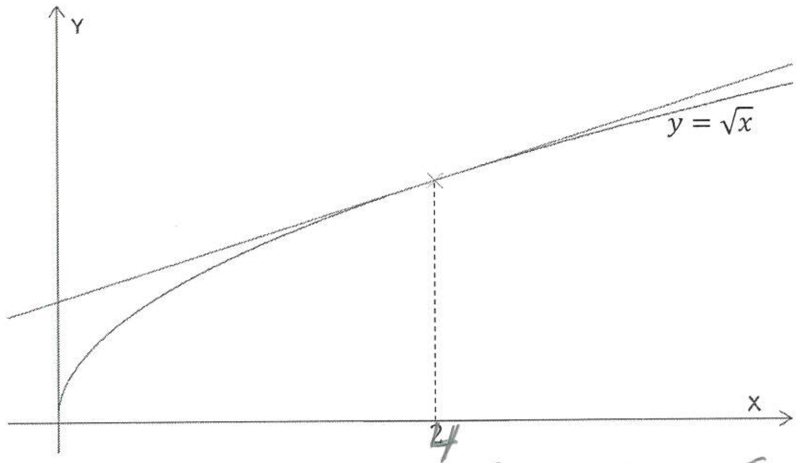
$f'(x) = \frac{-1,5 \cdot x^{-2,5}}{2} = -0,75 \cdot x^{-2,5} = \frac{-0,75}{x^{2,5}} = -\frac{3}{4x^{2,5}}$

4. Bestäm lutningen i den punkt där $x = 2$ till funktionen $f(x) = x^{-2}$ (1/1/0)

Lutningen där $x = 2$ $= f'(2)$ $f'(x) = -2 \cdot x^{-3} = -2 \cdot \frac{1}{x^3} = -\frac{2}{x^3}$

$$f'(2) = -\frac{2}{2^3} = -\frac{\cancel{2} \cdot 1}{\cancel{2} \cdot 2 \cdot 2} = -\frac{1}{4}$$

5. Figuren nedan visar grafen till funktionen $f(x) = \sqrt{x}$ med en tangent inritad där $x =$ ~~2~~ 4



Bestäm tangentens ekvation (1/2/0)

$f(x) = \sqrt{x} = [\sqrt{\ } = (\ )^{0,5}]$

$= x^{0,5}$ ← OBS! Oderiverad!

$y = f(4) = \sqrt{4} = 2$

$f'(x) = 0,5 \cdot x^{-0,5}$

$k = f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Tangentens ekv:

$\boxed{\begin{matrix}(4, 2) \\ k = \frac{1}{4}\end{matrix}} \Rightarrow \frac{1}{4} \cdot 4 + m = 2 \Rightarrow m = 1$

$y = \frac{x}{4} + 1$

6. Derivera funktionen nedan (0/2/0)
$f(x) = x\left(\pi \cdot x^2 - \frac{2}{x^2}\right)$

Gångra först in x i ( )

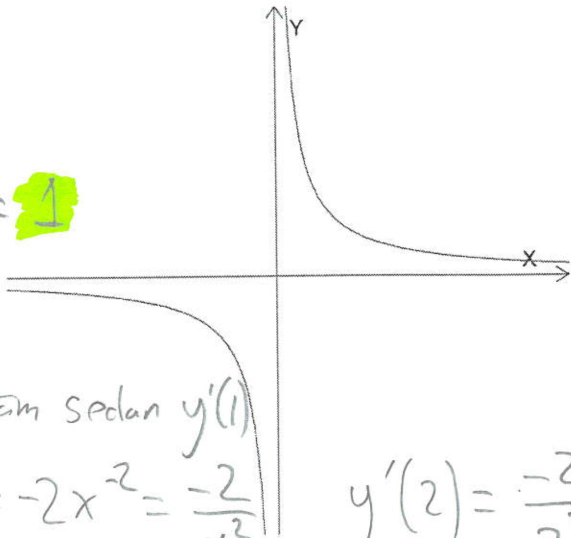
$= \pi \cdot x^3 - \frac{2x}{x^2} = \pi x^3 - \frac{2}{x} = \left[\frac{2}{x} = 2 \cdot x^{-1}\right] =$

$= \pi \cdot x^3 - 2x^{-1}$ ← OBS! Oderiverad!

$f'(x) = 3\pi x^2 - 2 \cdot (-1) \cdot x^{-2} = 3\pi x^2 + 2x^{-2} =$

$= 3\pi x^2 + \frac{2}{x^2}$

7. Figuren till höger visar grafen till funktionen $y = \frac{2}{x}$



a) Bestäm $y(2)$ (1/0/0)

$y(2) = \left[\begin{array}{l}\text{Sätt in} \\ x=2 \text{ i } y\text{-funk}\end{array}\right] = \frac{2}{2} = 1$

b) Bestäm $y'(2)$ (1/1/0)

Ta först fram $y'(x)$ och bestäm sedan $y'(1)$

$y(x) = \frac{2}{x} = 2 \cdot x^{-1}$ OBS! oderiverad!

$y'(x) = -2x^{-2} = \frac{-2}{x^2}$

$y'(2) = \frac{-2}{2^2} = \frac{-1}{2}$

c) Som figuren visar är funktionens graf ständigt på väg nedåt.
Visa detta med beräkningar. (0/2/0)

"Ständigt på väg nedåt" $\Rightarrow$ Derivatan alltid negativ.

Enligt b)-uppg. är $y'(x) = \frac{-2}{x^2}$

Eftersom x^2 alltid ger positiva svar för alla x kommer lutningen alltid bli $\frac{-2}{\text{positivt tal}}$ som blir negativt för alla x.

8. Funktionen $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}} + 2x$ har en vändpunkt med positivt x-värde.

Bestäm vändpunktens koordinater. (0/2/1)

"Vändpunkt" $\Rightarrow$ $f'(x) = 0$ ← OBS! Förväxla inte med $f'(0)$

$f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}} + 2x = 4 \cdot x^{-0,5} + 2x$ ← OBS! oderiverad!

$f'(x) = 4 \cdot (-0,5) \cdot x^{-1,5} + 2 = -2 \cdot x^{-1,5} + 2 = \frac{-2}{x^{1,5}} + 2$

$= \left[x^{1,5} = x \cdot \sqrt{x}\right] = \frac{-2}{x \cdot \sqrt{x}} + 2$

De x som funk. vänder vid uppfyller $f'(x) = 0$ $\Rightarrow$ $\frac{-2}{x\sqrt{x}} + 2 = 0$

$= -2 \Rightarrow x\sqrt{x} = 1$

$x = 1$

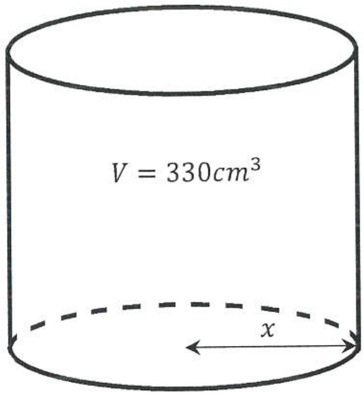
y-värdet vid vändpunkten: $y = f(1) = \frac{4}{\sqrt{1}} + 2 \cdot 1 = 4 + 2 = 6$

Vändpunktens koord: $(1, 6)$

9. En läskburk har formen av en cylinder med volymen 330 cm^3

Låt $A(x)$ vara en funktion som beskriver aluminiumets totala area när radien är x

Ta fram funktionen $A'(x)$ och tolka dess betydelse. (0/1/3)



Total area fås genom att "ta sönder" burken

$A = \text{Lock} + \text{Mantelyta} \cdot h + \text{Botten}$

omkretsen

$= \pi \cdot x^2 + 2\pi \cdot x \cdot h + \pi \cdot x^2$

$= 2\pi x^2 + 2\pi x \cdot h$

Arean beror av två variabler, men höjden bestäms av att volymen ska vara 330:

$V = \pi \cdot x^2 \cdot h \Leftrightarrow h = \frac{V}{\pi x^2} = [V = 330] = \frac{330}{\pi \cdot x^2}$

Sätts detta uttryck för höjden in i A-funk. fås

$A = 2\pi \cdot x^2 + 2\pi x \cdot h = \left[h = \frac{330}{\pi x^2}\right] =$

$= 2\pi x^2 + 2\pi \cdot x \cdot \frac{330}{\pi x^2} = 2\pi x^2 + \frac{660}{x}$

$\boxed{A'(x) = 4\pi x - \frac{660}{x^2}}$

$A'(x)$ beskriver hur mkt arean förändras för varje bestämd radie, eller hur Area-grafen lutar.

Del 2 – Med digitalt hjälpmedel

D1. Bestäm värdet av $f'(3)$ om $f(x) = x^{1,5}$.
Svara med 2 decimaler!

(1/0/0)

→ Ta fram $f'(x)$ m. deriveringsregler och stoppa in $x=3$: $f'(x) = 1,5 \cdot x^{0,5}$

$f'(1) \approx 2,60$

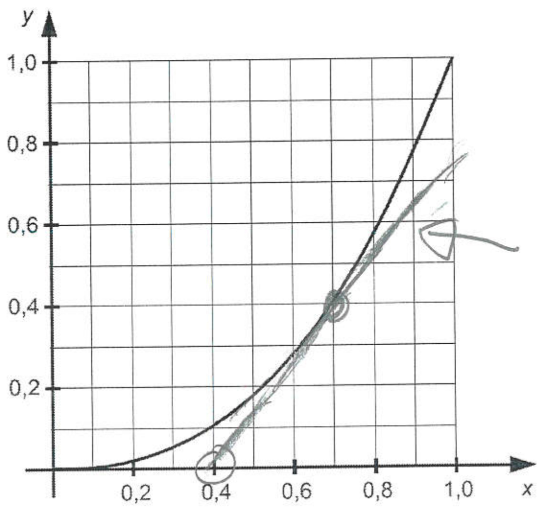
→ Använd nDeriv eller motsvarande : nDeriv(x∧1,5, x, 3)

$f'(1) \approx 2,60$

D2. Nedanstående uppgift är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften.

I koordinatsystemet nedan är grafen till funktionen $f(x) = x^{2,5}$ ritad.

Bestäm $f'(0,6)$ på två olika sätt.



Egenritad tangent

$k = \frac{0,4 - 0}{0,7 - 0,4}$

$= \frac{0,4}{0,3} \approx 1,33$

(2/1/0)

→ Använd deriveringsregler för att ta fram $f'(x)$ och stoppa sedan in $x=0,6$

$f(x) = x^{2,5}$ $\quad f'(x) = 2,5x^{1,5}$

$f'(0,6) = 2,5 \cdot 0,6^{1,5} \approx 1,16$

→ Digitalt deriveringsverktyg:

nDeriv(x∧2,5, x, 0,6) ≈ 1,16

→ Dra en egen tangent i grafen och läs av lutningen $\quad f'(0,6) \approx 1,33$