FACIT

Deriveringsregler II - Exponentialfunktioner

Del 1 – Utan digitalt hjälpmedel

1. Derivera

a) $f(x) = 6^x$ (1/0/0)

$f'(x) = 6^x \cdot \ln 6$

b) $f(x) = \cancel{5} \cdot 3^x - \cancel{5} \cdot 2^{3x}$ (2/0/0)

Konstanterna: $f'(x) = 5 \cdot \ldots - 5 \cdot \ldots$

$\Rightarrow f'(x) = 5 \cdot 3^x \cdot \ln 3 - 5 \cdot 2^{3x} \cdot \ln 2^3$

c) $f(x) = \frac{\cancel{3}}{5^{2x}} + \frac{4x}{\cancel{5}} + 2 = \left[5^{2x} \text{ i nämnaren } = 5^{-2x} \right]$ (0/1/0)

$= 3 \cdot 5^{-2x} + \frac{4x}{5} + 2 \leftarrow$ OBS! 0 deriverad!

Konstanterna: $f'(x) = 3 \ldots + \frac{4 \ldots}{5} \Rightarrow f'(x) = 3 \cdot 5^{-2x} \cdot \ln 5^{-2} + \frac{4}{5}$

2. Undersök om ekvationerna har någon lösning.
Om lösning/ar finns bestäm denna/dessa.

Exp. funktioner $(A \cdot a^x)$ är alltid positiva!

a) $\underline{3 \cdot 0{,}5^x} = -1$ (1/0/0)

Exp. funktion negativ

En exp. funktion kan inte ge ett neg. svar

$\Rightarrow$ Lösning saknas

b) $\underbrace{2 \cdot 4^{-x}} = -1$ (1/0/0)

$2 \cdot 4^{-x} = 2 \cdot \frac{1}{4^x} = \frac{2}{4^x}$: Exp. funktion

Exp. funktion Negativ

En exp. funktion kan inte ge ett neg. svar (även om det står "$-x$" i exp.) $\Rightarrow$ Lösning saknas

c) $4x \cdot 2^x - 2^x = 0$ (0/2/0)

Bryt ut 2^x : $2^x(4x - 1) = 0$

Nollprod. metoden

$2^x = 0$ $\qquad$ $4x - 1 = 0$

saknar lösning (en exp. funktion > 0) $\qquad$ $x = \frac{1}{4}$

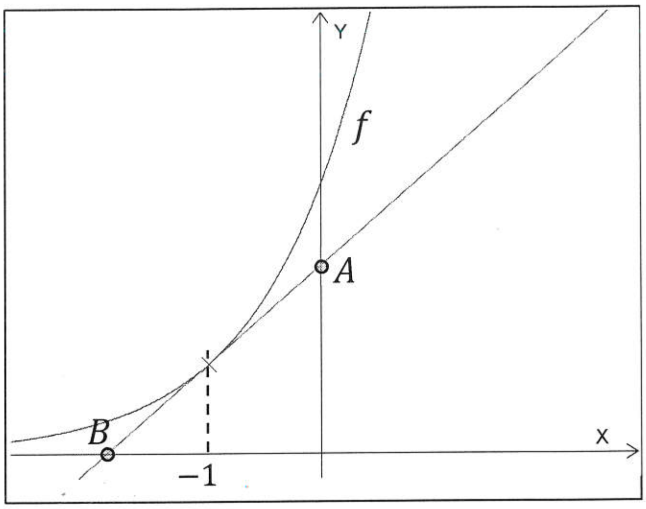
3. Bestäm ett uttryck för lutningen till funktionen $f(x) = 6 \cdot 2^{-x}$ i den punkt där $x = \cancel{3}\,2$. *Svara exakt!* (2/0/0)

Lutning där $x = 2 \Rightarrow f'(2)$.

Börja med att ta fram $f'(x) = 6 \cdot 2^{-x} \cdot \ln 2^{-1}$

Sätt in 2: $f'(2) = 6 \cdot 2^{-2} \cdot \ln 2^{-1} = \left[\begin{array}{l} 2^{-2} = \frac{1}{4} \\ 2^{-1} = \frac{1}{2} \end{array} \right] = \frac{6}{4} \cdot \ln \frac{1}{2}$

4. Figuren till höger visar grafen till funktionen $f(x) = 2 \cdot 3^x$ med en tangent inritad i den punkt där $x = -1$



a) Bestäm koordinaterna för punkten A.
Svara exakt! (1/2/0)

A = tangentens "m-värde"

$y = f(-1) = 2 \cdot 3^{-1} = \frac{2}{3}$

$f'(x) = 2 \cdot 3^x \cdot \ln 3$

$k = f'(-1) = 2 \cdot 3^{-1} \cdot \ln 3 = \frac{2}{3} \cdot \ln 3$

$\boxed{\begin{matrix}(-1, \frac{2}{3}) \\ k = \frac{2}{3}\ln 3\end{matrix}} \Rightarrow \begin{matrix} k \cdot x + m = y \\ \frac{2}{3} \cdot \ln 3 \cdot (-1) + m = \frac{2}{3} \end{matrix} \Rightarrow m = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\ln 3 \Rightarrow$ A har koord: $\left(0, \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\ln 3\right)$

b) Bestäm koordinaterna för punkten B.
Svara exakt! (0/2/0)

B = tangentens skärning med x-axeln ⇒ "Tangenten = 0"

$k \cdot x + m = 0$

$\frac{2}{3} \cdot \ln 3 \cdot x + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\ln 3 = 0 \Rightarrow$ [Dela allt med $\frac{2}{3}$] $\Rightarrow \ln 3 \cdot x + 1 + \ln 3 = 0$

$\Rightarrow \ln 3 \cdot x = -1 - \ln 3 \Rightarrow x = \frac{-1 - \ln 3}{\ln 3} = -\frac{1}{\ln 3} - 1 \Rightarrow$ B har koord: $\left(-\frac{1}{\ln 3} - 1, 0\right)$

c) Det finns en annan tangent till funktionen f som går igenom origo.
Bestäm ett exakt uttryck för dess lutning. (0/1/3)

Anta att tangeringspunkten har x-värdet a.
Då blir $y = f(a) = 2 \cdot 3^a$ och dess k-värde $f'(a)$

$k = f'(a) = 2 \cdot 3^a \cdot \ln 3$

$\boxed{\begin{matrix}(a, 2 \cdot 3^a) \\ k = 2 \cdot 3^a \cdot \ln 3\end{matrix}} \Rightarrow \begin{matrix} k \cdot x + m = y \\ 2 \cdot 3^a \cdot \ln 3 \cdot a + m = 2 \cdot 3^a \end{matrix} \Rightarrow m = 2 \cdot 3^a - 2 \cdot 3^a \cdot \ln 3 \cdot a$

"Går igenom origo" $\Rightarrow m = 0 \Rightarrow 2 \cdot 3^a - 2 \cdot 3^a \cdot \ln 3 \cdot a = 0$

Bryt ut $2 \cdot 3^a$: $2 \cdot 3^a(1 - \ln 3 \cdot a) = 0$

Nollprod. metoden: $2 \cdot 3^a = 0$ Saknar lösning; $1 - \ln 3 \cdot a = 0$, $a = \frac{1}{\ln 3}$

Med a känt kan k-värdet bestämmas: $k = 2 \cdot 3^a \cdot \ln 3 = \left[a = \frac{1}{\ln 3}\right]$

$k = 2 \cdot 3^{1/\ln 3} \cdot \ln 3$

5. Bestäm ett exakt värde av gränsvärdet nedan. (0/0/2)

$$\lim_{h\to 0}\frac{4^{1+h}-4}{h}$$

Jmf med derivatans definition:

$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \Rightarrow f(a+h)=4^{1+h}$, $f(a)=4 \Rightarrow f(x)=4^x$, $a=1$

Gränsvärdet motsvarar alltså värdet av $f'(1)$ om $f(x)=4^x \Rightarrow f'(x)=4^x\cdot\ln 4$

$f'(1)=4\cdot\ln 4$

$\Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{4^{1+h}-4}{h}=4\cdot\ln 4$

Del 2 – Med digitalt hjälpmedel

D1. Bestäm värdet av $f'(3)$ om $f(x)=2\cdot 1{,}4^x$
Svara med 3 decimaler! (1/0/0)

"Manuellt": $f'(x)=2\cdot 1{,}4^x\cdot\ln 1{,}4$

$\rightarrow f'(3)=2\cdot 1{,}4^3\cdot\ln 1{,}4$

$\approx 1{,}847$

Deriveringsverktyg:

$\rightarrow$ nDeriv( ) el. Geogebra

nDeriv(2*1,4^X,X,3) $\approx 1{,}847$

2*1,4^x

$f'(3)\approx 1{,}847$

D2. Nedanstående uppgift är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften.

Sommaren 1930 planterade man sjögull som prydnadsväxt i sjön Väringen. Idag konkurrerar den ut andra sjöväxter och ställer till med stora problem för både sjöfart och fiske.

Den första sjögullplantan täckte en area på $0{,}01\,\text{m}^2$. Sambandet

$A(x)=0{,}01\cdot 1{,}48^x$

kan användas som modell för sjögullens utbredning i Väringen, där $A(x)\,\text{m}^2$ är den area som täcks av sjögull x år efter 1930.

a) Hur stor yta av sjön täcktes av sjögull sommaren 1950? (1/0/0)

b) Hur många gånger större var tillväxthastigheten för utbredningen av sjögull 1975 jämfört med 1950? (0/2/0)

a) 1950 = 20 år efter 1930 $\Rightarrow x=20$ $A(20)=0{,}01\cdot 1{,}48^{20}=25{,}4\,\text{m}^2$

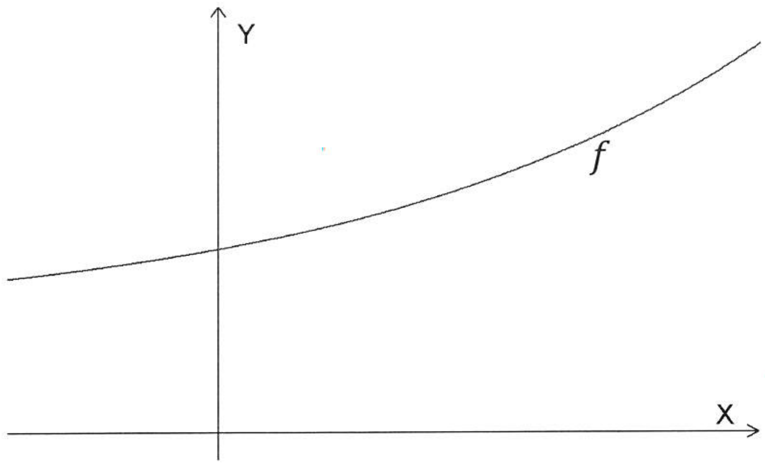
b) "Tillväxthastigheten" = Derivatan

1975 $\Rightarrow x=45$ $f'(45)=179932\ \text{m}^2/\text{år}$

1950 $\Rightarrow x=20$ $f'(20)=10\ \text{m}^2/\text{år}$

"Gånger större" $=\frac{f'(45)}{f'(20)}=\frac{179932}{10}=$ 18000 ggr större (!)

D3. Figuren nedan visar grafen till funktionen $f(x) = 2 \cdot 1{,}24^x + 3$



a) Bestäm tangentens ekvation i den punkt där $x = 2$
Endast svar krävs! Svara med 2 decimaler! (1/0/0)

Miniräknaren: $\boxed{2nd}$ → $\boxed{PRGM}$ (draw) → 5: Tangent
Skriv 2 och tryck enter ($x=2$) ⇒ $y = 0{,}66x + 4{,}75$

Geogebra: skriv in funk. och därefter "tangent(2, f)" ⇒ $y = 0{,}66x + 4{,}75$

b) Det finns en punkt där y-värdet är 7. Bestäm lutningen i denna punkt.
Svara med 2 decimaler! (1/1/0)

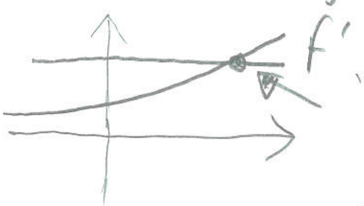
Rita ut linjen $y=7$ och bestäm skärningen.
Intersect ⇒ $x \approx 3{,}222\ldots$
Skärning(f, y=7) = (3,222; 7)
Bestäm sedan derivatan i $x = 3{,}222$ på valfritt sätt.
$K = f'(3{,}222) \approx 0{,}86$

c) Bestäm $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ (0/1/0)
Endast svar krävs!

När x blir ett stort negativt tal motsvarar det en stor nämnare på första termen: $2 \cdot 1{,}24^{-x} + 3 = \frac{2}{1{,}24^x} + 3$
Första termen → 0 och hela uttrycket mot 3

d) Bestäm $f(2a)$ om $f'(a) = 1$.
Svara med 2 decimaler! (0/2/0)

Rita ut derivatagrafen och linjen $y=1$

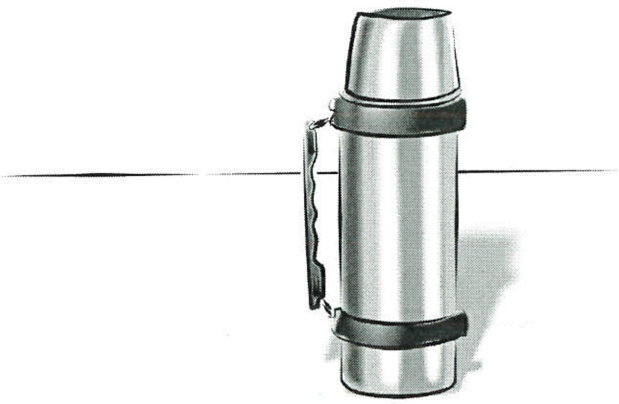


"intersection" eller skärning ger $x = a = 3{,}921$

Med a känt kan f(2a) bestämmas:
$f(2a) = f(2 \cdot 3{,}921) \approx 13{,}81$

D4. Nedanstående uppgift är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften.

En termos fylls med hett kaffe och placeras direkt utomhus där temperaturen ligger kring noll grader. Temperaturen på kaffet avtar exponentiellt med tiden.



Efter 4 timmar är temperaturen 76 °C och vid samma tidpunkt minskar temperaturen med hastigheten 4,1 °C per timme.

a) Vilken var temperaturen på kaffet då det hälldes i termosen? (0/1/2)

b) Kaffet anses drickbart så länge dess temperatur inte understiger 55 °C. Hur lång tid efter att man hällt kaffet i termosen är det fortfarande drickbart? (0/1/0)

a) Det finns flera sätt att lösa uppgiften, exempelvis:

algebraiskt + miniräknare: →

T avtar exp. $\Rightarrow T(x) = A \cdot a^x$

$T(4) = 76 \Rightarrow A \cdot a^4 = 76$ (1)

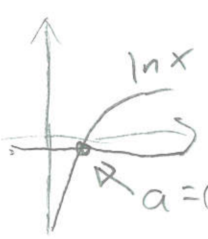
$T'(4) = -4,1 \Rightarrow A \cdot a^4 \cdot \ln a = -4,1$ (2)

Ekv (1) ger: $A = \frac{76}{a^4}$

sätt in i (2): $\frac{76}{a^4} \cdot a^4 \cdot \ln a = -4,1$

Denna typ av ekv. kommer senare kunna lösas exakt med talet e $\rightarrow \ln a = \frac{-4,1}{76}$

Nu görs dock grafisk lösning:



ln x

a = 0,947

Med a känt kan A bestämmas:

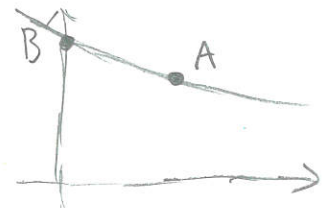
$A = \frac{76}{a^4} = [a = 0,947] = 94,3$

$T(0) = 94,3 \cdot 0,947^0 = 94,3\ °C$

Geogebra: →

* Sätt ut en punkt: A=Punkt(4, 76)
* Sätt ut en punkt låst på x-axeln: B=Punkt(x=0)
* Genomför en exp. regression mellan de båda punkterna: RegressionExp({A, B})
* Beräkna derivatan där x = 4   f'(4)

Dra punkt B längs y-axeln tills derivatan blir −4,1

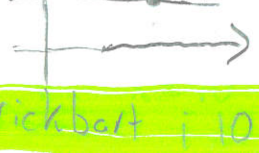


B

A

Om B har y-värdet 94,3 stämmer derivatan vid A ⇒ 94,3 °C

b) Rita ut linjen y = 55 tillsammans med funktionen från a) $T(x) = 94,3 \cdot 0,947^x$:



x=10

⇒ Kaffet är drickbart i 10 timmar