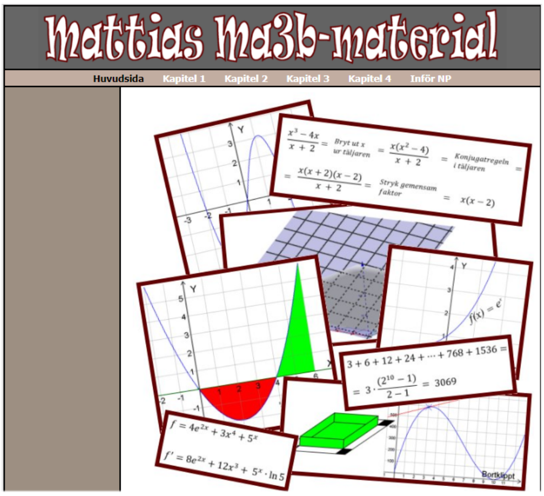


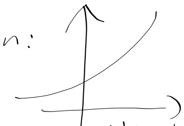
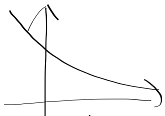

# 2.5 - Deriveringsregler 2 - exponentialfunktioner

# Vad menas med exponentialfunktioner..?

En exp. funktion beskriver resultatet efter procentuella förändringar.

Formen: $f(x) = A \cdot a^x$

där a är en för. faktor.

Graferna är antingen:  el. 

I båda fallen är de alltid positiva!!

Deriveringsregel för exponentialfunktioner:

Om $f(x) = a^x$ så gäller

$$f'(x) = a^x \cdot \ln a$$

Kopiera funktionen · ln "allt utom x"

Exempel 1: Derivera funktionerna nedan

a) $y = 2^x$

$$\boxed{y' = 2^x \cdot \ln 2}$$

b) $y = 4 \cdot 2^x - 12 \cdot 4^{3x}$ OBS!! $4 \cdot 2^x \neq 8^x$

Börja med sifferdelarna: $y' = 4 \cdot \quad - 12 \cdot$ $\qquad 12 \cdot 4^{3x} \neq 48^{3x}$

Fyll därefter i resten: $\boxed{y' = 4 \cdot 2^x \ln 2 - 12 \cdot 4^{3x} \cdot \ln 4^3}$

c) $y = \dfrac{3x + x^3 - 3 \cdot 3^{3x} + 3}{5}$

* Sifferdelarna: $y' = \dfrac{3 \quad + \quad -3}{5}$

* Resten: $y' = \dfrac{3 \cdot 1 + 3x^2 - 3 \cdot 3^{3x} \cdot \ln 3^3}{5}$

Exempel 2: Bestäm ett exakt värde på lutningen till funktionen $f(x) = 2 \cdot 3^{2x}$ i den punkt där $x = 0,5$

Lutningen ges av derivatafunk.

$f'(x) = 2 \cdot 3^{2x} \cdot \ln 3^2$

OBS!! 2:an är bara en konstant som inte påverkar deriveringen av $3^{2x}$

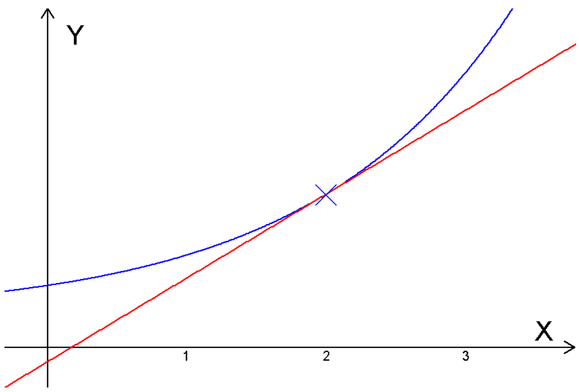
Lutning då $x = 0,5$: $f'(0,5)$

$$f'(0,5) = 2 \cdot 3^{2 \cdot 0,5} \cdot \ln 9 = \left[ 3^{2 \cdot 0,5} = 3^1 = 3 \right]$$

$$= 2 \cdot 3 \cdot \ln 9 = 6 \cdot \ln 9$$

Exempel 3: Figuren visar grafen till funktionen $f(x) = 1 + 2^x$ med en tangent inritad i den punkt där $x = 2$.

Bestäm tangentens ekvation. Svara exakt!




För en tangents ekv krävs en punkt och ett k-värde

$$\boxed{\begin{matrix}(2, 5) \\ k = 4 \cdot \ln 2\end{matrix}}$$

y-värdet fås som $f(2)$

$$y = f(2) = 1 + 2^2 = 1 + 4 = 5$$

k-värdet fås som $f'(2)$

Derivata funk. $f'(x) = 2^x \cdot \ln 2$

$$k = f'(2) = 2^2 \cdot \ln 2 = 4 \cdot \ln 2$$

Nu kan m-värdet bestämmas:

$$\boxed{\begin{matrix}(2, 5) \\ k = 4 \ln 2\end{matrix}} \Rightarrow \begin{aligned} k \cdot x + m &= y \\ 4 \cdot \ln 2 \cdot 2 + m &= 5 \\ 8 \cdot \ln 2 + m &= 5 \\ m &= 5 - 8 \ln 2 \end{aligned}$$

Tangentens ekv: $\boxed{y = 4 \ln 2 \cdot x + 5 - 8 \ln 2}$

## Härledning av deriveringsregeln

Via högerställd ändringskvot fås:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{x+h-x} = \begin{bmatrix} f(x) = a^x \\ f(x+h) = a^{x+h} \end{bmatrix}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \begin{bmatrix} a^{x+h} = a^x \cdot a^h \end{bmatrix}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{a^x \cdot a^h - a^x}{h} = \begin{bmatrix} \text{Bryt ut } a^x \\ \text{ur täljaren} \end{bmatrix}$$

$$= a^x \left( \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} \right) = a^x \cdot \ln a$$

Funktionen själv

"Ett tal som beror på $a$" $= \ln a$

Exempel 4: Bestäm ett exakt värde på gränsvärdet nedan

$$\lim_{x\to 0} \frac{5^x - 1}{x}$$

2 lösningsmetoder:

→ "känner igen def. av ln":

" $\ln a = \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}$ "

I uppgiften: $\lim_{x\to 0} \frac{5^x - 1}{x} \Rightarrow \ln 5$

---

→ känner igen ändringskvot vid derivatans definition:

$$f'(b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(b+h) - f(b)}{h}$$

I uppgiften: $\lim_{x\to 0} \frac{5^x - 1}{x} \Rightarrow \begin{matrix} f(b) = 1 \\ f(b+x) = 5^x \end{matrix}$

Lite knep och knåp ger: $f(x) = 5^x$

och punkten: $b = 0$

$$f(0+x) = 5^{0+x} = 5^x$$

$$f(0) = 5^0 = 1$$

Det gränsvärde som sökes är alltså $f'(0)$ till funk. $f(x) = 5^x$

$$f(x) = 5^x \Rightarrow f'(x) = 5^x \cdot \ln 5$$

$$f'(0) = 5^0 \cdot \ln 5 = 1 \cdot \ln 5 = \ln 5$$

Alltså, båda sätten ger:

$$\lim_{x\to 0} \frac{5^x - 1}{x} = \ln 5$$

# Exponentialfunktioner - med digitala verktyg

→ Antingen derivera manuellt och slå svaret. "ln" fås via ln-knappen

→ Använd verktyget för derivering:
nDeriv(   )      "Skriv f'(siffra)"

Exempel 5: Bestäm ett ungefärligt värde på lutningen till funktionen $f(x) = 3 \cdot 1{,}3^{1{,}2x}$ i den punkt där $x = 1{,}5$.

Svara med tre värdesiffror!

1) Derivera manuellt:

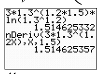
$f'(x) = 3 \cdot 1{,}3^{1{,}2x} \cdot \ln 1{,}3^{1{,}2}$

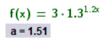
$f'(1{,}5) = 3 \cdot 1{,}3^{1{,}2 \cdot 1{,}5} \cdot \ln 1{,}3^{1{,}2}$

$\approx 1{,}51$

2) Använd deriveringsverktyg i digitala hjälpmedlet.

nDeriv(   ) ; f'(1,5)




Exempel 6: En kopp varmt kaffe ställs in i ett rum. Kaffets temperatur, T °C,efter att kaffet stått i rummet i x minuter, väntas följa funktionen

$T(x) = 49{,}2 \cdot 0{,}973^{\,x} + 23{,}4$

a) Bestäm T(0) och tolka resultatet

1. Manuellt

$T(0) = 49{,}2 \cdot 0{,}973^{0} + 23{,}4$
$= 72{,}6$

2) Skriv in funk. och skriv $Y_1(0)$ el. $T(0)$

$Y_1(0) = 72{,}6$   $T(0) = 72{,}6$


⇒ Kaffet hade temperaturen 72,6°C när koppen ställdes in.

b) Bestäm T ' (10) och tolka resultatet

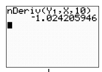
1) "Manuellt"

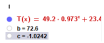
Derivera: $T'(x) = 49{,}2 \cdot 0{,}973^{x} \cdot \ln 0{,}973$

$T'(10) = 49{,}2 \cdot 0{,}973^{10} \cdot \ln 0{,}973$
$\approx -1{,}024$

2) Deriveringsverktyget:

nDeriv(   ) ; T'(10)




⇒ Kaffets temperatur minskar med 1,024 °C/minut efter 10 minuter.

c) En viss tid efter att koppen ställts in i rummet minskar temperaturen med hastigheten 0,5 °C / minut. Ange kaffets temperatur vid den tidpunkten.

1) "Manuellt":

$T'(x) = -0{,}5$

$49{,}2 \cdot 0{,}973^{x} \cdot \ln 0{,}973 = -0{,}5$

$-1{,}35 \cdot 0{,}973^{x} = -0{,}5$

$0{,}973^{x} = \frac{-0{,}5}{-1{,}35} = 0{,}371$

$x = \frac{\lg 0{,}37}{\lg 0{,}973}$

$= 36{,}2$ minuter

$T(36{,}2) = 49{,}2 \cdot 0{,}973^{36{,}2} + 23{,}4$
$= 41{,}67\ °C$

2) Grafisk lösning m.h.a. digitalt verktyg.

* Rita ut derivatans graf och linjen $y = -0{,}5$.
* Hitta skärnings punkten
* Bestäm T(x-värdet)