FACIT

Talet e och ln – naturliga logaritmen

Del 1 – Utan digitalt hjälpmedel

1. Derivera

a) $f(x) = e^{2x} - 2x$ (1/0/0)

$f'(x) = e^{2x} \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 2e^{2x} - 2$

b) $f(x) = 3e^{-x} - 4e^{-2x}$ (1/0/0)

$f'(x) = 3e^{-x} \cdot (-1) - 4 \cdot e^{-2x} \cdot (-2) = -3e^{-x} + 8e^{-2x}$

c) $f(x) = \frac{6}{e^{2x}} - 2e^{6x} + 6ex$ $= \left[\frac{6}{e^{2x}} = \text{"}e^{2x} \text{ i nämnaren"} = 6 \cdot e^{-2x} \right]$ (0/1/0)

$= \boxed{6 \cdot e^{-2x} - 2e^{6x} + 6ex}$ ← OBS! oderiverad!

$f'(x) = 6e^{-2x} \cdot (-2) - 2 \cdot e^{6x} \cdot 6 + 6e \cdot 1 = -12e^{-2x} - 12e^{6x} + 6e$

2. Bestäm värdet av

a) $\ln e - \ln 1$ $= \left[\begin{array}{l} \ln \text{"svaret"} = \text{Vad } e \text{ ska höjas upp med för att få "svaret"} \\ e = e^1 \quad 1 = e^0 \end{array} \right]$ (1/0/0)

$= \ln e^1 - \ln e^0 = 1 - 0 = 1$

b) $e^{ln2} + 2\ln e^2$ $= \left[\begin{array}{l} e \text{ och } \ln \text{ efter varandra} \\ \Rightarrow \text{ Tar ut varandra} \end{array} \right] =$ (1/0/0)

$= \cancel{e^{\ln}} 2 + 2 \cdot \cancel{\ln e}^2 = 2 + 2 \cdot 2 = 6$

c) $\ln\frac{1}{e^2} + e^{\ln\frac{1}{e}}$ $= \left[\frac{1}{e^2} = e^{-2} \quad \frac{1}{e} = e^{-1} \right] = \ln e^{-2} + e^{\ln e^{-1}} =$ (0/1/0)

$= \left[\begin{array}{l} \ln e^{-2} = -2 \\ \ln e^{-1} = -1 \end{array} \right] = -2 + e^{-1} = -2 + \frac{1}{e}$

3. Undersök om ekvationen nedan har någon lösning

$2xe^{2x} - 4e^{2x} = 0$ (1/1/0)

Bryt ut $2e^{2x}$ (eller bara e^{2x}) $\Rightarrow 2e^{2x}(x-2) = 0$

Nollprod. tänk:

$2e^{2x} = 0$

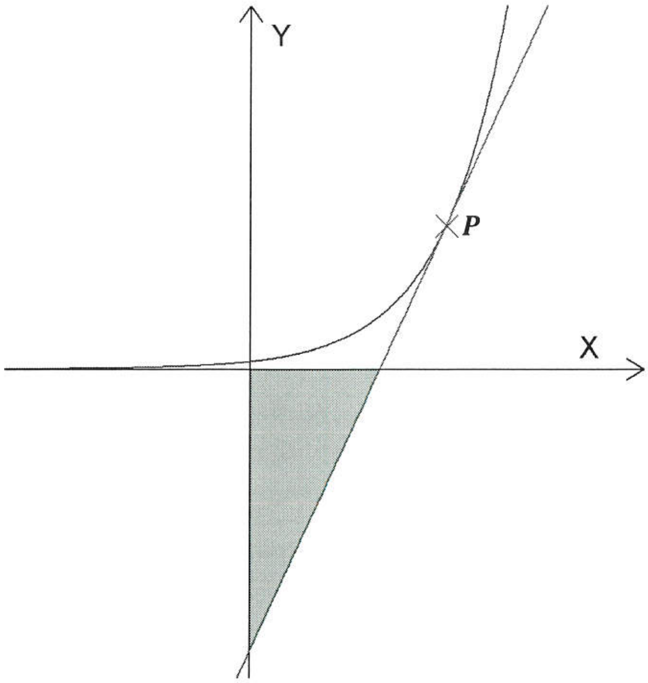
Saknar lösning. (exp funktion positiv)

$x - 2 = 0$

$x = 2$

Ekv. har en lösning $x = 2$

4. Figuren nedan visar grafen till funktionen $f(x) = e^x$ med en tangent inritad med tangeringspunkt $\boldsymbol{P}$



a) Tangentens lutning är e^3. Bestäm koordinaterna för punkten $\boldsymbol{P}$ (2/0/0)

För $f(x) = e^x$ gäller $f'(x) = e^x$, dvs y-värdet och lutningen är alltid densamma.

$\Rightarrow$ y-värdet är e^3. x-värdet är exponenten, 3

$\Rightarrow$ P har koord. $(3, e^3)$

b) I figuren finns även en triangel markerad. Bestäm arean av denna triangel. *Svara exakt!* (1/2/0)

Sida a utgörs av tangentens m-värde (men positivt). Sida b är det x-värde där tangenten korsar x-axeln.

1. Tangentens m-värde: $\boxed{\begin{matrix}(3, e^3) \\ k = e^3\end{matrix}} \Rightarrow$ $kx + m = y$

$e^3 \cdot 3 + m = e^3$

$m = -2e^3$

$m = -2e^3 \Rightarrow a = 2e^3$

2. Skärningen med x-axeln: "$y = 0$"

$e^3 \cdot x - 2e^3 = 0 \Rightarrow x = \frac{2e^3}{e^3} = 2$

$x = 2 \Rightarrow b = 2$

3. Beräkna arean: $A = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{2e^3 \cdot 2}{2} = 2e^3$

5. Nedanstående uppgift är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften.

Ange *alla* funktioner som har egenskapen att $f(x) = f'(x)$ där $f(x) \neq 0$

$A \cdot e^x$ där A är en konstant. (0/1/1)

Den enda funktion som har sig själv som derivatafunk. är exp. funk. e^x. Dock kommer alla konstanter framför "följa med" vid deriveringen

6. Sortera talen nedan i storleksordning. Börja med det minsta. (0/2/0)

A $\ln e$ **B** $2e$ **C** e^2 **D** $\ln\frac{1}{e}$ **E** $e^{\ln\frac{1}{e^2}}$

A: $= [e = e^1] = \ln e^1 = 1$

B: $\sim 2 \cdot 2{,}7 = 5{,}4$

C: $\sim 2{,}7^2 \sim 7{,}\ldots$

D: $= [\frac{1}{e} = e^{-1}] = \ln e^{-1} = -1$

E: $= [\frac{1}{e^2} = e^{-2}] = e^{\ln e^{-2}} = e^{-2} = [e^{-2} = \frac{1}{e^2}] = \frac{1}{e^2}$

I storleksordning: -1 $0,\ldots$ 1 $5{,}4$ $7,\ldots$ $\approx \frac{1}{7,\ldots} \approx 0,\ldots$

Minst D E A B C Störst

7. Lös ekvationerna

a) $e^{4x} = \ln e^4 = 4$ $[\cancel{\ln e^4} = 4$ ln och e efter varandra slår ut varandra$]$ (1/1/0)

$e^{4x} = 4$ [Motsatsen till $e^{()}$ är $\ln()$]

$\cancel{\ln e}^{4x} = \ln 4$

$4x = \ln 4$

$x = \frac{\ln 4}{4}$

b) $e^{2x} \cdot \ln 2x - e^{2x} \cdot 4 = 0$ (0/2/0)

1 Bryt ut e^{2x} som är gemensamt:

$e^{2x}(\ln 2x - 4) = 0$

2 Nollprod. Varje faktor $=0$ för sig

$e^{2x} = 0$

saknar lösning (exp. funktion alltid positiv)

$\ln 2x - 4 = 0$

$\ln 2x = 4$ [Motsatsen till $\ln()$ är $e^{()}$]

$\cancel{e^{\ln}} 2x = e^4$

$2x = e^4$

$x = \frac{e^4}{2}$

8. Grafen till funktionen $f(x) = e^{2x} - x$ har en vändpunkt.
Bestäm koordinaterna för denna vändpunkt. *Svara exakt!* (1/1/1)

Vändpunkt $\Rightarrow$ "Lutningen noll"

$f'(x) = e^{2x} \cdot 2 - 1 = 2e^{2x} - 1$

Lutningen noll $\Rightarrow$ $2e^{2x} - 1 = 0$

$2e^{2x} = 1$

$e^{2x} = \frac{1}{2}$ [motsatsen till $e^{()}$ är $\ln()$]

$2x = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

$x = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{2}$ *

$\boxed{\begin{array}{l} * \\ \ln\left(\frac{1}{2}\right) \text{ kan även skrivas som } \ln 2^{-1} \\ = -1 \cdot \ln 2 = -\ln 2 \end{array}}$

$\rightarrow$ med x känt kan y-värdet bestämmas!

$y = f\left(\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{2}\right) =$

$= e^{\frac{2 \cdot \ln \frac{1}{2}}{2}} - \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{2} =$

$= e^{\ln \frac{1}{2}} - \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{2}$

$\Rightarrow$ Koordinaterna för vändpunkten:

$\left(\frac{^*\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{2} , \frac{^*1 - \ln\left(\frac{1}{2}\right)}{2} \right)$

9. Nedanstående uppgift är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften.

För $f(x) = e^{2x}$ gäller att $f(1,1) \approx 9$
Använd att $f(1,1) \approx 9$ och bestäm ett närmevärde till

a) $f'(1,1)$ (0/1/0)

b) $f'(3,3)$ (0/0/1)

$f(x) = e^{2x}$

$f'(x) = e^{2x} \cdot 2$

$f(1,1) \approx 9 \Rightarrow e^{2 \cdot 1,1} \approx 9$

$e^{2,2} \approx 9$

a) $f'(1,1) = e^{2 \cdot 1,1} \cdot 2 = e^{2,2} \cdot 2 = \left[e^{2,2} \approx 9\right] \approx 9 \cdot 2 = 18$

b) $f'(3,3) = e^{2 \cdot 3,3} \cdot 2 = e^{6,6} \cdot 2 = \left[\begin{array}{l} e^{6,6} = e^{3 \cdot 2,2} \\ = (e^{2,2})^3 \end{array}\right] =$

$= (e^{2,2})^3 \cdot 2 \approx \left[e^{2,2} \approx 9\right] \approx 9^3 \cdot 2 = 1458$

Del 2 – Med digitalt hjälpmedel

D1 Nedanstående uppgift är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften.

En patient med hjärtfel har fått konstgjorda hjärtklaffar inopererade. Medan hjärtklaffarna håller på att stängas kan trycket i halspulsådern beskrivas enligt modellen

$$P = 95 \cdot e^{-0{,}65 \cdot t}$$

där P är trycket i enheten mm Hg och t är tiden i sekunder från det att hjärtklaffarna börjar stängas.

a) Beräkna trycket efter 0,2 sekunder. *Endast svar fordras* (1/0/0)

b) Bestäm $P'(0{,}1)$ (1/0/0)

c) Vad säger $P'(0{,}1)$ om trycket i halspulsådern? (0/1/0)

Tillverkaren har sagt att det ska ta högst 0,5 sekunder för de konstgjorda klaffarna att stängas. Klaffarna har stängts när trycket har sjunkit till 70 mm Hg.

d) Hur lång tid tar det för klaffarna att stängas för denna patient? (0/1/0)

a) Trycket ges av $P(0{,}2) = 95 \cdot e^{-0{,}65 \cdot 0{,}2} = 83{,}4$ mm Hg

b) "Manuellt" $\longrightarrow$

$P'(t) = 95 \cdot e^{-0{,}65 \cdot t} \cdot (-0{,}65)$

$= -61{,}75 \cdot e^{-0{,}65 \cdot t}$

$P'(0{,}1) = -61{,}75 \cdot e^{-0{,}65 \cdot 0{,}1} = -57{,}9$

Deriveringsverktyg $\longrightarrow$

nDeriv(Y₁,X,0.1) el. $P'(0{,}1)$ i Geogebra

$\approx -57{,}9$

c) Derivatan beskriver hur snabbt trycket förändras.

$P'(0{,}1) \doteq -57{,}9 \Rightarrow$ "Trycket sjunker med 57,9 mm Hg/s vid tiden 0,1 s"

d) "Manuellt" $\longrightarrow$

$P = 70$

$\frac{95 \cdot e^{-0{,}65 \cdot t}}{95} = \frac{70}{95}$

$e^{-0{,}65 \cdot t} = 0{,}737$

$-0{,}65 \cdot t = \ln 0{,}737$

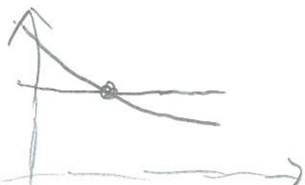
$t = \frac{\ln 0{,}737}{-0{,}65} = 0{,}47$ s

Grafisk lösning med verktyg $\longrightarrow$

Rita funktionerna

$P = 95 \cdot e^{-0{,}65 t}$ och

$y = 70$



Skärningspunkt: $t \approx 0{,}47$ s

D2 Nedanstående uppgift är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften.

Karolina häller upp en kopp kaffe i ett rum där temperaturen är 20°C. Hon mäter kaffets temperatur direkt och därefter varje minut under de första 5 minuterna. Karolina anpassar sedan en matematisk modell till sina mätvärden:

$$T(t) = 95e^{-0.039t}$$

där T är kaffets temperatur i °C och t är tiden i minuter efter att Karolina startade sin mätning av temperaturen.

a) Bestäm temperaturen hos kaffet då Karolina startade sin mätning. (1/0/0)

b) Bestäm med hur många procent temperaturen hos kaffet minskar per minut. (0/1/0)

c) Karolinas modell stämmer väl överens med verkligheten i början. Utvärdera hur väl hennes modell stämmer överens med verkligheten över tid. (0/1/1)

a) Temperaturen i början av mätningen ges av

$T(0) = 95 \cdot e^{-0,039 \cdot 0} = 95\ °C$

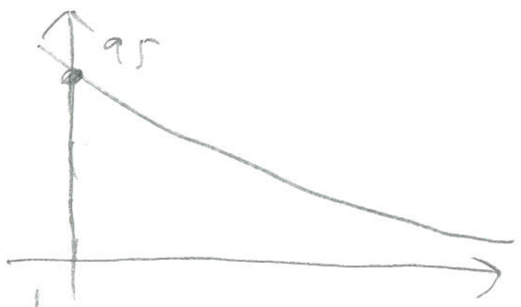
b) Procent/minut ses lättast via förändringsfaktorn:

$a = e^{-0,039} \approx 0,962 \Rightarrow$ minskning med 3,8%

Det går även att bestämma via t.ex

$\frac{T(1)}{T(0)} \approx 0,962$

c) Ritas grafen fås



Detta antyder att kaffets temperatur till slut sjunker ned till noll, vilket är orimligt i ett rum med temp 20°C.

Kaffet borde aldrig haft lägre temp än 20°C, men denna modell påstår att efter 40 minuter sker just det $\Rightarrow$ Orimlig över tid.

D3 För en funktion på formen $f(x) = Ae^{kx}$ gäller:

$f'(5) = -1{,}5$ och $f(5) = 44$.

Lös ekvationen $f(x) = x$. *Svara med en decimal!* (0/1/3)

"Manuellt" →

$f'(x) = Ae^{kx} \cdot k$

$f(5) = 44 \Rightarrow Ae^{k \cdot 5} = 44$

$f'(5) = -1{,}5 \Rightarrow Ae^{k \cdot 5} \cdot k = -1{,}5$

$$\frac{f'(5)}{f(5)} = \frac{\cancel{Ae^{k \cdot 5}} \cdot k}{\cancel{Ae^{k \cdot 5}}} = \frac{-1{,}5}{44}$$

$$k = -\frac{1{,}5}{44}$$

Med k känt kan A bestämmas:

$$A \cdot e^{k \cdot 5} = 44 \Rightarrow \left[k = -\frac{1{,}5}{44}\right]$$

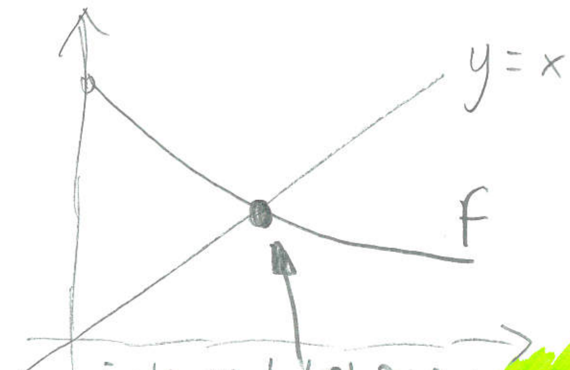
$$A \cdot e^{-\frac{1{,}5}{44} \cdot 5} = 44$$

$$A = \frac{44}{e^{-7{,}5/44}} \approx 52{,}177$$

Ekvationen $f(x) = x$ blir nu:

$$52{,}177 \cdot e^{-\frac{1{,}5}{44} \cdot x} = x$$

Denna har ingen algebraisk lösning, men kan lösas grafiskt:



intersect / Skärning: $x \approx 23{,}5$

"Geogebra" →

Skapa punkten $A = (5, 44)$

Fäst punkten B på y-axeln

Kör en exp. reg mellan punkterna A och B:

RegressionExp({A, B})

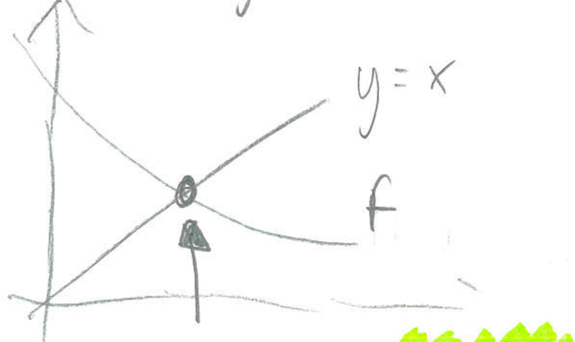
Beräkna derivatan där $x = 5$: $f'(5)$

Flytta B tills $f'(5)$ blir $-1{,}5$

Det ger funktionen:

$$f(x) = 52{,}177 \cdot 0{,}9665^x$$

Rita sedan in $y = x$ och ta fram skärning mellan dessa



Skärning: $x \approx 23{,}5$