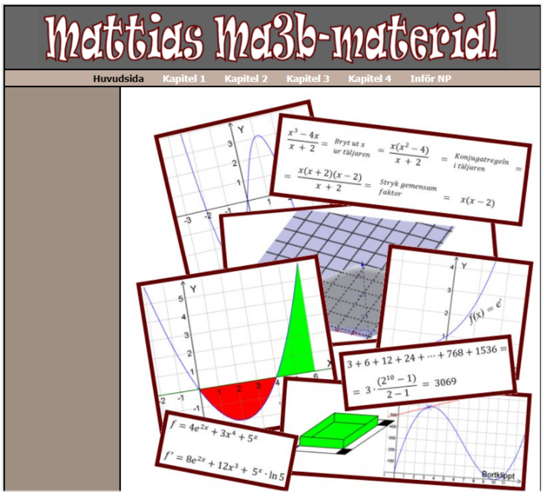


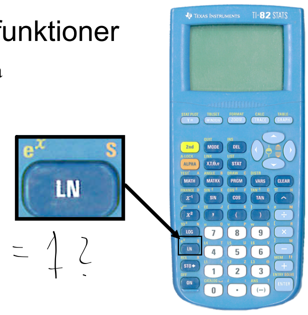
2.6 - Talet e och ln - naturliga logaritmen

"Talet e"..?

Bakgrund: Derivatan av exponentialfunktioner

Om $f(x) = a^x$ gäller $f'(x) = a^x \cdot \ln a$

där $\ln a = \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}$



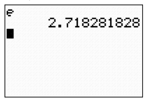
Finns det något värde på a som gör att $\ln a = 1$?

$\ln 4 \approx 1{,}38$

$\ln 3 \approx 1{,}10$

$\ln 2 \approx 0{,}69$ ← Det finns en siffra mellan 2 och 3 vars ln-värde blir 1!

Denna siffra kallas talet $e \approx 2{,}718\ldots$



Detta innebär att

$f(x) = e^x \rightarrow f'(x) = e^x \ln e = e^x \cdot 1 = e^x$

dvs $f(x) = e^x$ har sig själv som derivata!! $\Rightarrow f(x) = e^{k \cdot x}$

$f'(x) = e^{kx} \cdot k$

Exempel 1: Derivera funktionerna nedan

a) $y = e^{3x} - 3x + 3$

$y' = e^{3x} \cdot 3 - 3 \cdot 1 + 0 = 3e^{3x} - 3$

b) $y = ex - e^{-x}$

$y' = e \cdot 1 - e^{-x} \cdot (-1)$

$= e + e^{-x}$

OBS! e är som vilken siffra som helst, dvs på samma sätt som derivatan av $7x = 7 \cdot 1$ är $ex = e \cdot 1$

c) $y = \frac{4}{5e^{2x}} + e^2$

e^{2x} i nämnaren $\Rightarrow e^{-2x}$

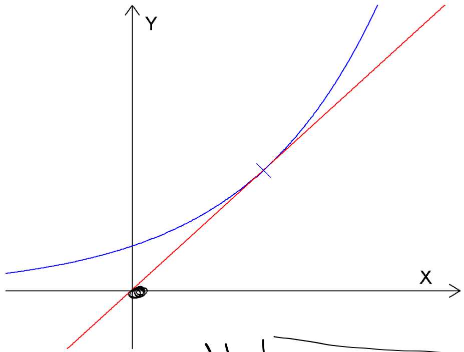
$y = \frac{4}{5e^{2x}} + e^2 = \frac{4}{5} e^{-2x} + e^2$ ← OBS! Oderiverad!

$y' = \frac{4}{5} e^{-2x} \cdot (-2) + 0 = \frac{4}{5e^{2x}} \cdot (-2)$

$= \frac{-8}{5e^{2x}}$

Exempel 2: Figuren visar grafen till funktionen $f(x) = 2e^{0,5x}$ med en tangent inritad i den punkt där $x = 2$.

På bilden ser det ut som att tangenten går igenom origo. Undersök om det stämmer.



Vid alla tangentekv gäller: " $\boxed{\begin{matrix}(\ , \ ) \\ k=\end{matrix}}$ "

Punktens x-värde är givet, $x=2$

Punktens y-värde fås som $f(2)$

$$y = f(2) = 2 \cdot e^{0,5 \cdot 2} = 2e^1 = 2e$$

k-värdet fås via derivatan, $k = f'(2)$

$$f'(x) = 2 \cdot e^{0,5x} \cdot 0,5 = e^{0,5x}$$

$$k = 2 = f'(2) = e^{0,5 \cdot 2} = e^1$$

$$\boxed{\begin{matrix}(2, 2e) \\ k=e\end{matrix}} \Rightarrow \begin{matrix} kx + m = y \\ e \cdot 2 + \ldots = 2e \end{matrix}$$

$m = 0$

$m = 0 \Rightarrow$ Tangenten korsar y-axeln i origo, vilket stämmer med informationen i bilden.

ln som den naturliga logaritmen

ln är för talet som lg är för talet 10

Om ln och e följer varandra "släcker" de ut varandra.

Ex: $\cancel{\ln e}^7$ = "ln och e efter varandra" = 7

$\cancel{e}^{\ln 7}$ = "e och ln efter varandra" = 7

ln siffra ⟹ "Vad ska e höjas upp med för att få svaret siffra?" ⟹ ex ln 50 $e^{??} = 50$

Exempel 3: Ordna talen A -F i storleksordning med det minsta först

A	B	C	D	E	F
$\ln e^2$	$2e$	e^2	$\ln 10$	$\ln \frac{1}{e}$	$e^{\ln 3}$
↓	↓	↓	↓	↓	↓
["ln och e efter varandra"]	[$e \approx 2{,}7$]	[$e \approx 2{,}7$]	[$e^2 = 10$]	[$\frac{1}{e} = e^{-1}$]	[e och ln efter varandra]
2	$\sim 5{,}4$	$\sim 8{,}\ldots$	$\sim 2{,}\ldots$	$\ln e^{-1}$ -1	3

E, A, D, F, B, C

Exempel 4: Lös ekvationerna. Svara exakt!

ln och $e^{()}$ är varandras motsatser.

a) $\ln x = 0{,}4$

$$e^{\ln x} = e^{0{,}4}$$

$$x = e^{0{,}4}$$

b) $e^{2x+1} = 15$

$$\ln e^{(2x+1)} = \ln 15$$

$$2x+1 = \ln 15$$

$$x = \frac{\ln 15 - 1}{2}$$

c) $\ln\left(\frac{x+1}{3}\right) = 2$

$$e^{\ln\left(\frac{x+1}{3}\right)} = e^2$$

$$\frac{x+1}{3} = e^2$$

$$x+1 = 3e^2$$

$$x = 3e^2 - 1$$

Talet e och ln - med digitala verktyg

Exempel 5: Tre prognoser för utvecklingen på olika fondkonton x år efter en insättning på 10 000 kr presenteras nedan:

A $f(x) = 10000 \cdot 1{,}09^{x}$

B $g(x) = 10000 \cdot e^{0{,}09x}$

C $h(x) = 10000 \cdot 1{,}03^{3x}$

a) Hur mycket skulle finnas på respektive fondkonto efter 4 år?

b) Hur många procent ökar saldot på respektive konto med varje år?

c) Skriv om A och C på formen $10000 \cdot e^{kx}$

d) Tolka betydelsen av ekvationen $\frac{g(4) - g(1)}{3} = g'(x)$

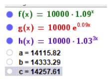
e) Lös ekvationen i d)

a) Värdet efter 4 år ges av:

$f(4) = 14\,116$ kr

$g(4) = 14\,333$ kr

$h(4) = 14\,258$ kr



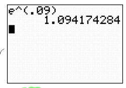
b) Det finns flera sätt att lösa, men t.ex kan förr. faktorn tolkas.

Skriv om på formen: $10000 \cdot a^{x}$ och tolka a som en förr. faktor.

$f(x) = 10000 \cdot 1{,}09^{x} \rightarrow a = 1{,}09 \Rightarrow +9\,\%/\text{år}$

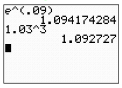
$g(x) = 10000 \cdot e^{0{,}09x} \Rightarrow a = e^{0{,}09} = 1{,}094 \Rightarrow$

$+9{,}4\,\%/\text{år}$



$h(x) = 10000 \cdot 1{,}03^{3x} \Rightarrow a = 1{,}03^{3} = 1{,}0927$

$+9{,}27\,\%/\text{år}$



c) $f(x) = 10000 \cdot 1{,}09^{x} \Rightarrow 1{,}09 = e^{k}$

$\ln 1{,}09 = k$

$= 10000 \cdot e^{\ln 1{,}09 \cdot x}$

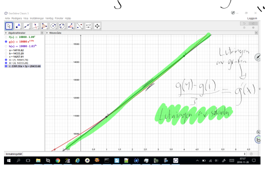
$g(x) = 10000 \cdot e^{0{,}09x}$ Redan på rätt form.

$h(x) = 10000 \cdot 1{,}03^{3x} \Rightarrow 1{,}03^{3} = e^{k}$

$\ln 1{,}03^{3} = k$

$= 10000 \cdot e^{\ln 1{,}03^{3} \cdot x}$

d) $\frac{g(4) - g(1)}{3} = g'(x)$

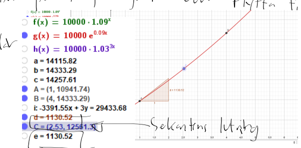


"Vid vilket x-värde lutar sekanten och grafen lika mycket?

När ökar värdet på fondkonto g lika mycket som det gör i genomsnitt mellan år 1 och 4?

e). Många lösningsmetoder, t.ex skapa en flyttbar punkt på grafen och flytta tills lutningen där matchar sekantens lutning.

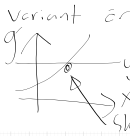
$X \approx 2{,}53$



Sekantens lutning

Lutningen i C

En annan variant är att tänka skärningspunkter.



Skärning: