FACIT

Kapitel 2 - Repetition

Del 1a – Utan digitalt hjälpmedel – Endast svar

1. Derivera polynomen nedan

Derivatan 0

a) $f(x) = 4x^5 - 2x^2 + 4$

Svar: $f'(x) = 20x^4 - 4x$ (1/0/0)

b) $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{2}$

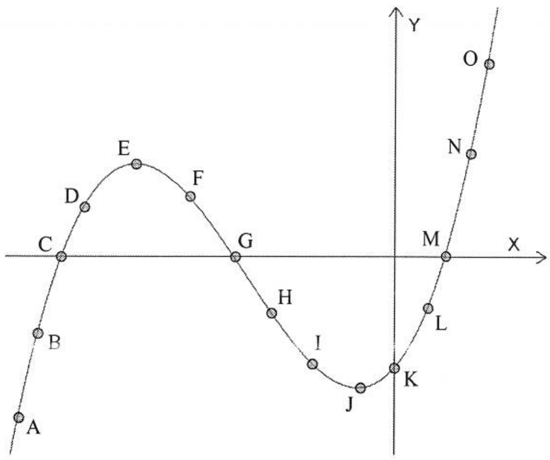
Svar: $f'(x) = \dfrac{2x+1}{2} = x + \dfrac{1}{2}$ (1/0/0)

c) $f(x) = \dfrac{2x^3}{3} + \dfrac{4x}{5} + 3$

Derivatan 1

Svar: $f'(x) = \dfrac{6x^2}{3} + \dfrac{4}{5} = 2x^2 + \dfrac{4}{5}$ (1/0/0)

2. Figuren nedan visar grafen funktionen f. I grafen har punkterna A - O markerats. I vilken/vilka av punkterna uppfylls att...



a) $f > 0$ "positiva y-värden"

Svar: D, E, F, N, O (1/0/0)

b) $f' = 0$ "lutningen noll"

Svar: E, J (1/0/0)

c) $f' < 0$ "negativ lutning"

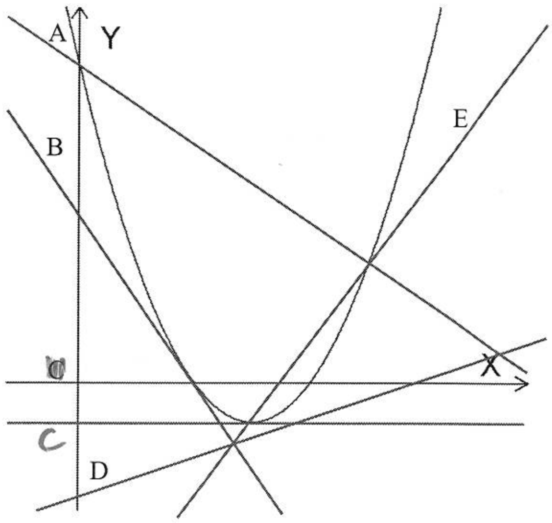
Svar: F, G, H, I (1/0/0)

d) $f' > 0$ och $f \leq 0$ **samtidigt** "y-värden neg. eller noll"

"pos. lutning"

Svar: A, B, C, K, L, M (0/1/0)

3. Figuren nedan visar grafen till en andragradsfunktion och fem räta linjer, A - E. Vilken/vilka av linjerna visar...



a) *tangenter* till andragradsfunktionen

Svar: B, C (1/0/0)

b) *sekanter* till andragradsfunktionen

Svar: A, E (1/0/0)

4. Lös ekvationerna

Svara exakt!

a) $e^{2x} = 4 \Rightarrow \cancel{\ln} \ln e^{2x} = \ln 4$

$2x = \ln 4$

$x = \frac{\ln 4}{2}$

Svar: $x = \frac{\ln 4}{2}$ (1/0/0)

b) $4^x + 1 = 0 \Rightarrow 4^x = -1$

Exp. funktion Neg. tal

Svar: Lösning saknas (1/0/0)

c) $\ln(2x+1) = 1 \Rightarrow e^{\ln(2x+1)} = e^1$

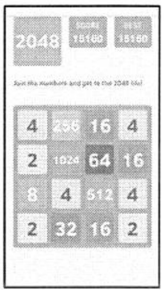
$2x+1 = e^1$

$2x = e - 1$

$x = \frac{e-1}{2}$

Svar: $x = \frac{e-1}{2}$ (0/1/0)

5. Inge Stress gillar appen "2048". Nedan visas en tabell över hur Inges maxpoängen ökat under en period.



Vecka	40	41	42	43	44	45
Maxpoäng	2226	6214	8102	12048	13048	17226

a) Beräkna den genomsnittliga ökningen av Inges maxpoäng under perioden vecka 40 till 45

$$\frac{M(45) - M(40)}{45 - 40} = \frac{17226 - 2226}{5}$$

Svar: 3000 poäng/vecka (2/0/0)

b) Inges syster Vilma tittar på tabellen och genomför divisionen nedan.

$$\frac{13048 - 6214}{44 - 41} = 2278$$

$\frac{\text{"Skillnaden i poäng"}}{\text{"Veckor"}}$ = Genomsnittlig förändring.

Vilket av alternativen nedan visar betydelsen av vad Vilma har beräknat?

A Inges maxpoäng under vecka 44.

B Hur snabbt Inges maxpoäng ökade vecka 41.

C Hur mycket högre maxpoängen var vecka 44 jämfört med vecka 41. = Täljaren

D Den genomsnittliga förändringen av maxpoängen mellan vecka 41 och 44.

E Den genomsnittliga maxpoängen under vecka 41 och 44.

Svar: D (1/0/0)

6. En boll sparkas rakt upp i luften. Bollens höjd över marken kan bestämmas med funktionen

Hastigheten ges av derivatan

$h(x) = 13x - 5x^2$

$h'(x) = 13 - 10x$

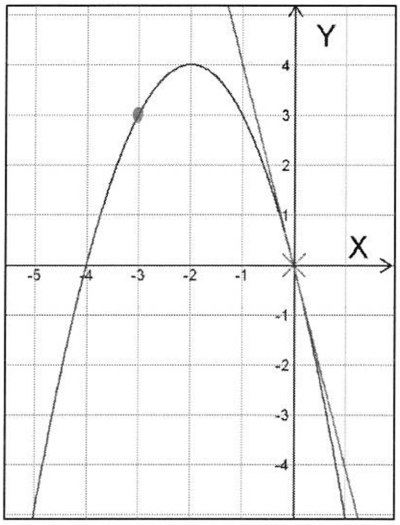
h är höjden över marken i meter
x är tiden i sekunder

$h'(1) = 13 - 10 \cdot 1 = 3$

Bestäm bollens ***hastighet*** efter 1 sekund.

Svar: 3 m/s (1/0/0)

7. Figuren till höger visar andragradsfunktionen f och en tangent med tangeringspunkt i origo.



Bestäm

a) $f(-3)$ = "y där x = -3"

Svar: 3 (1/0/0)

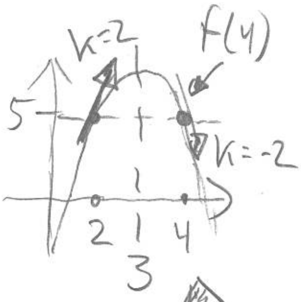
b) $f'(-2)$ = "lutningen där x = -2"

Svar: 0 (1/0/0)

c) $f'(0)$ = "lutningen där x = 0" (fås via tangenten)

Svar: −4 (1/0/0)

8. För en andragradsfunktion, f, med ett maximumvärde vid $x = 3$ gäller att $f(2) = 5$ och $f'(2) = 2$.



Bestäm värdet på

a) $f(4)$ ← Samma höjd, men på andra sidan symm. linjen

Svar: 5 (1/0/0)

b) $f'(4)$ ← Samma lutning, men tvärtom (se figur)

Svar: −2 (0/1/0)

9. Derivera

a) $f(x) = 2e^{3x} + \frac{4x}{5} \boxed{+3}$ ← Derivatan noll.

Svar: $f'(x) = 6e^{3x} + \frac{4}{5}$ (1/0/0)

b) $f(x) = \frac{5}{2^x} \boxed{-\frac{2}{5}} + \frac{5}{2x} =$

[skriv om] $= 5 \cdot 2^{-x} - \frac{2}{5} + \frac{5}{2} \cdot x^{-1}$

$f'(x) = 5 \cdot 2^{-x} \cdot \ln 2^{-1} + \frac{5}{2} \cdot (-1) \cdot x^{-2}$

Svar: $f'(x) = 5 \cdot \ln 2^{-1} 2^{-x} - \frac{5}{2} x^{-2}$ (0/1/0)

$= \frac{5 \ln 2^{-1}}{2^x} - \frac{5}{2x^2}$

10. Bilden nedan visar graferna till två funktioner, f och g.
Ett av alternativen nedan visar lösningen/lösningarna till ekvationen $f'(x) = g'(x)$. "Samma lutning"
Vilket alternativ är det?

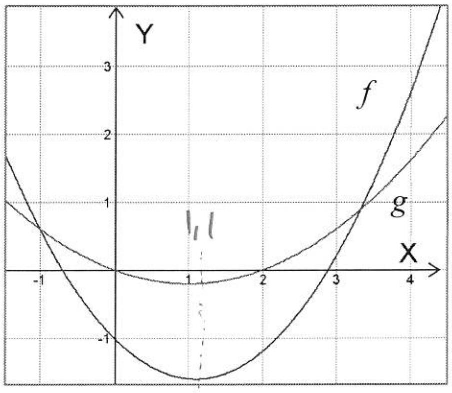
A $x_1 = -1,\ x_2 = 3{,}3$

B $x_1 = 0,\ x_2 = 2$

C $x = 1{,}1$

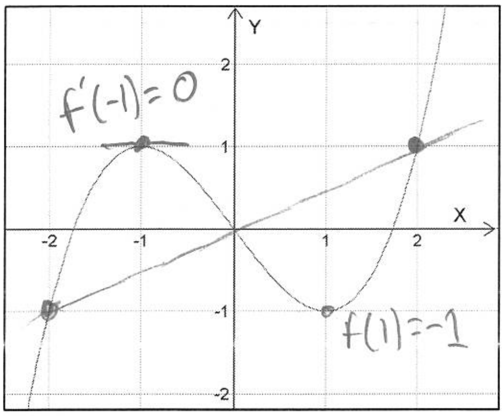
D $x = 2{,}8$

E $x = 3$



Svar: C (0/1/0)

11. Nedan visas grafen till tredjegradsfunktionen f



= lutningen av sekanten

a) Bestäm med hjälp av figuren *ändringskvoten* i intervallet $-2 \leq x \leq 2$

Svar: 0,5 (1/0/0)

b) Bestäm värdet av $f'(-1) + 2 \cdot f(1)$

$0 + 2 \cdot (-1)$

Svar: -2 (0/1/0)

12. Vilket av alternativen nedan beskriver lutningen till funktionen $f(x) = 3 \cdot 2^x$ i den punkt där $x = a$

$f'(x) = 3 \cdot 2^x \cdot \ln 2$

$f'(a) = 3 \cdot 2^a \cdot \ln 2$

OBS! $3 \cdot 2^a \neq 6^a$

A $6^a \cdot \ln 6$

B $3 \cdot 2^a \cdot \ln 6$

C $3a \cdot 2^{a-1}$

D $6^a \cdot \ln 2$

E $3 \cdot 2^a \cdot \ln 2$

Svar: E (0/1/0)

13. Derivera $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = \left[\begin{matrix}\text{Skriv}\\ \text{om}\end{matrix}\right]$

$= x^{-0,5}$

Svar: $f'(x) = -0,5 \cdot x^{-1,5}$ (0/1/0)

$= -\frac{1}{2x^{1,5}}$

14. För funktionen f gäller att en tangent i den punkten där $x = 2$ har ekvationen $y = 3x + 2$

Bestäm $f'(2) + f(2)$

Tangentens lutning $= 3$

Tangentens y där $x = 2$ $= 8$

Svar: $3 + 8 = 11$ (0/1/0)

15. Derivera funktionerna

a) $f(x) = 3e^{2x} + \frac{1}{e^{2x}} = \left[\begin{matrix}\text{Skriv}\\ \text{om}\end{matrix}\right]$

$= 3e^{2x} + e^{-2x}$

Svar: $f'(x) = 6e^{2x} - 2e^{-2x}$ (0/1/0)

$= 6e^{2x} - \frac{2}{e^{2x}}$

b) $f(x) = 2^x + x^2 + 2^2 + \frac{x}{2} + 2e$

Derivatan noll

Svar: $f'(x) = 2^x \cdot \ln 2 + 2x + \frac{1}{2}$ (0/1/0)

16. Vera önskar beräkna derivatan av funktionen f i en viss punkt, $x = a$ och ställer då upp den korrekta uppställningen nedan.

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^4 - 2^4}{2 + h - 2}$$

Jmf med $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

a) Vilken är funktionen f?

Svar: $f(x) = x^4$ (0/1/0)

b) Bestäm $f'(a)$

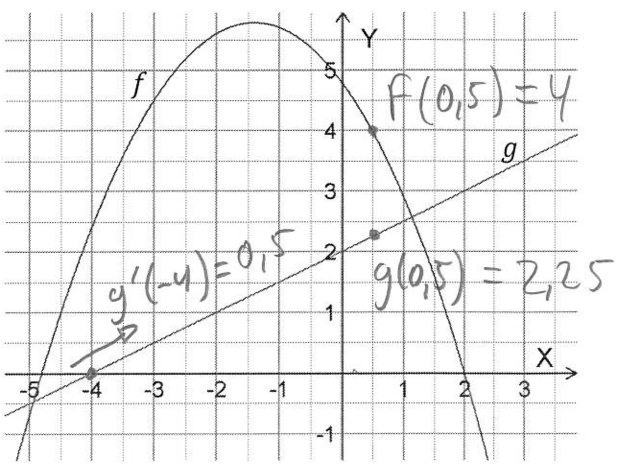
$(a+h)^4 = (2+h)^4$

$\Rightarrow a = 2$

$f'(x) = 4x^3$ $\quad f'(2) = 4 \cdot 2^3$

Svar: 32 (0/0/1)

17. Graferna visar de två funktionerna f och g. För funktionen h gäller $h(x) = f(x) - g(x)$



Bestäm $h(g'(-4)) = h(0,5)$

Svar: $1,75 = \frac{7}{4}$ (0/0/1)

$h(0,5) = f(0,5) - g(0,5)$

$\approx 4 - 2,25$

$f'(x) = 2x$

18. Låt $f(x) = x^2$. Ordna följande tal i storleksordning med det *minsta först*

A $e^{\ln e}$	**B** $\cancel{\ln e}^{0,5}$	**C** $f(-1)$	**D** $f'(e)$	**E** $f(e)$
$= e \approx 2,7$	$0,5$	$(-1)^2 = 1$	$2 \cdot e$	e^2

Svar: B, C, A, D, E (0/0/1)

19. I nedanstående figur finns tre stycken koordinatsystem.

I det mittersta är grafen till funktionen f' utritad.

Använd den som utgångspunkt för att göra **grova skisser** i de tomma koordinatsystemen av hur "släktingarna" f och f'' skulle kunna se ut! (0/2/2)

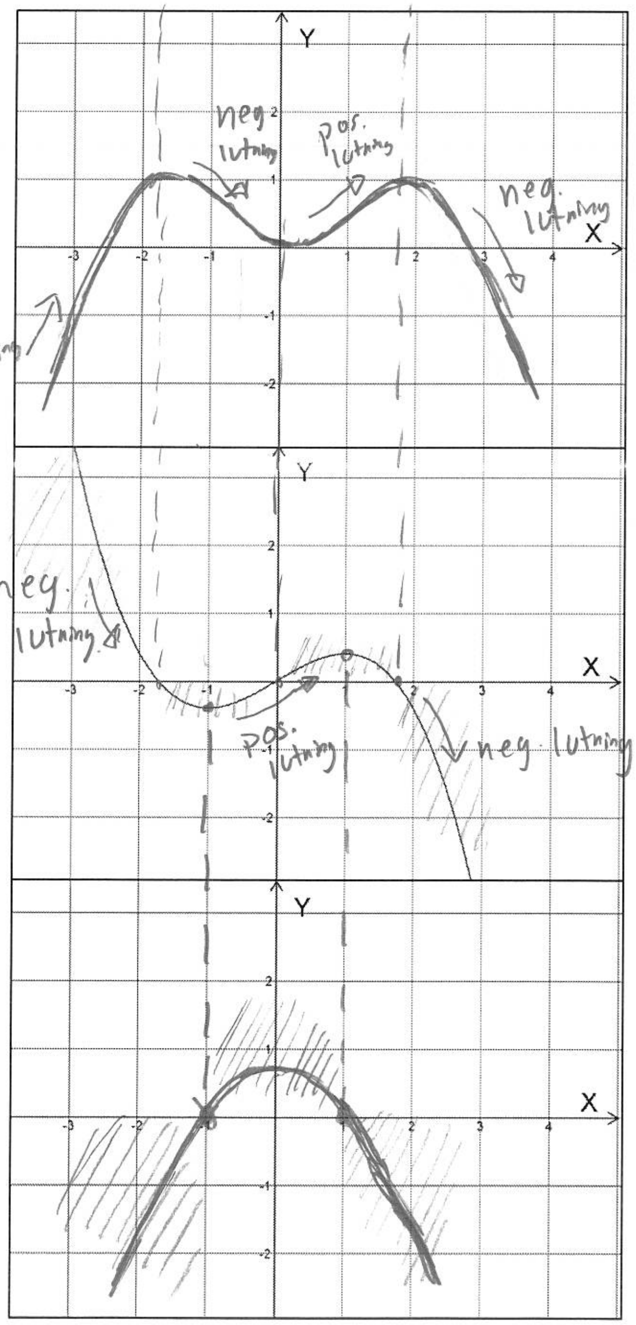
Lutningen ges av y-värdena hos den nedanför

pos. lutning

pos. y-värden

neg. lutning

f



f'

f''

Fjärdegrad

Tredjegrad

Andragrad

Del 1b – Utan digitalt hjälpmedel – Fullständiga uträkningar krävs

20. För funktionerna f och g gäller att $f(x) = 4x^2 - 6x + 3$ och $g(x) = 9x - x^2 + 1$

För vilket värde på x gäller att $f'(x) = g'(x)$? (2/0/0)

$f'(x) = 8x - 6$

$g'(x) = 9 - 2x$

$+2x \quad +6$

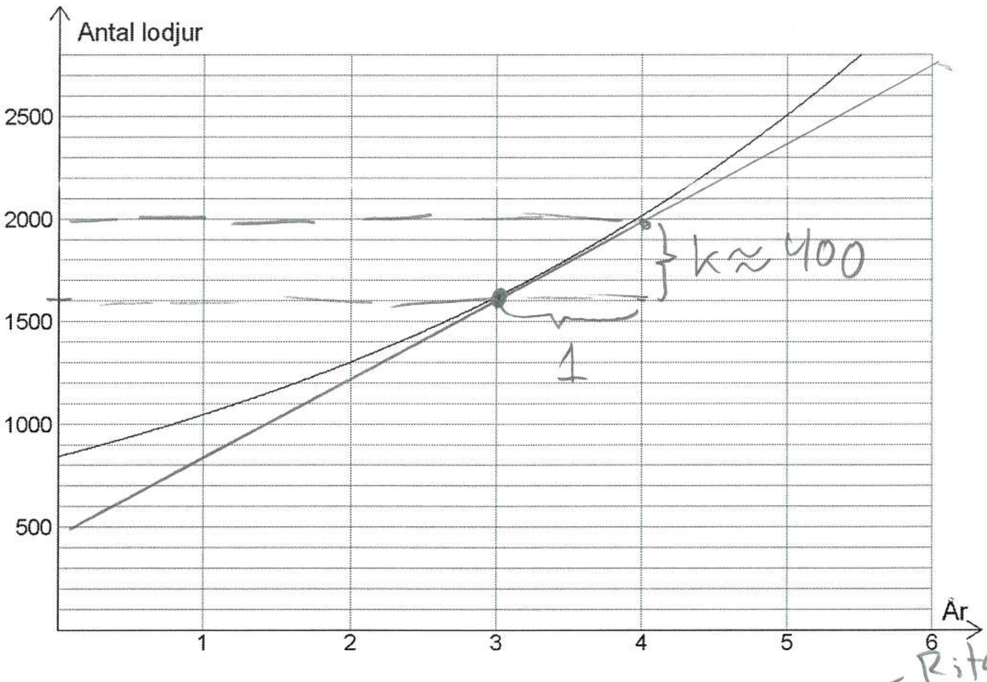
$f'(x) = g'(x) \Rightarrow 8x - 6 = 9 - 2x \quad {}^{+2x}_{+6}$

$10x = 15$

$x = 1{,}5$

21. Enligt siffror från Naturvårdsverket har antalet lodjur i Sverige ökat mellan år 2014 och 2016. Utifrån dessa värden har en exponentiell modell över utvecklingen ställts upp.

Figuren nedan visar grafen till denna modell, där
L = beräknat antalet lodjur
x = antal år som gått sedan 2014



a) Bestäm ett ungefärligt värde på $L'(3)$ med hjälp av grafen (2/0/0)

Rita en egen tangent.

Tangentens lutning $\approx \frac{400}{1} = 400$

(OBS! Ett mer exakt värde fås om punkter med längre avstånd väljs)

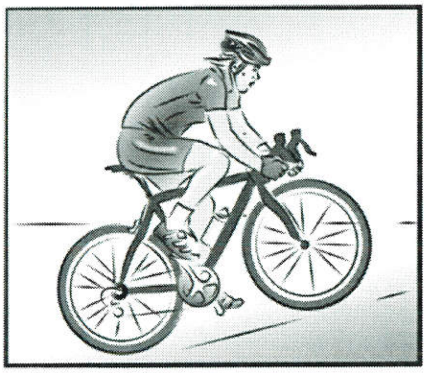
b) Tolka betydelsen av $L'(3)$ i detta sammanhang (1/1/0)

3 år efter 2014 ⇒ År 2017

År 2017 var ökningstakten ca 400 lodjur/år

22. Uppgiften nedan är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften.

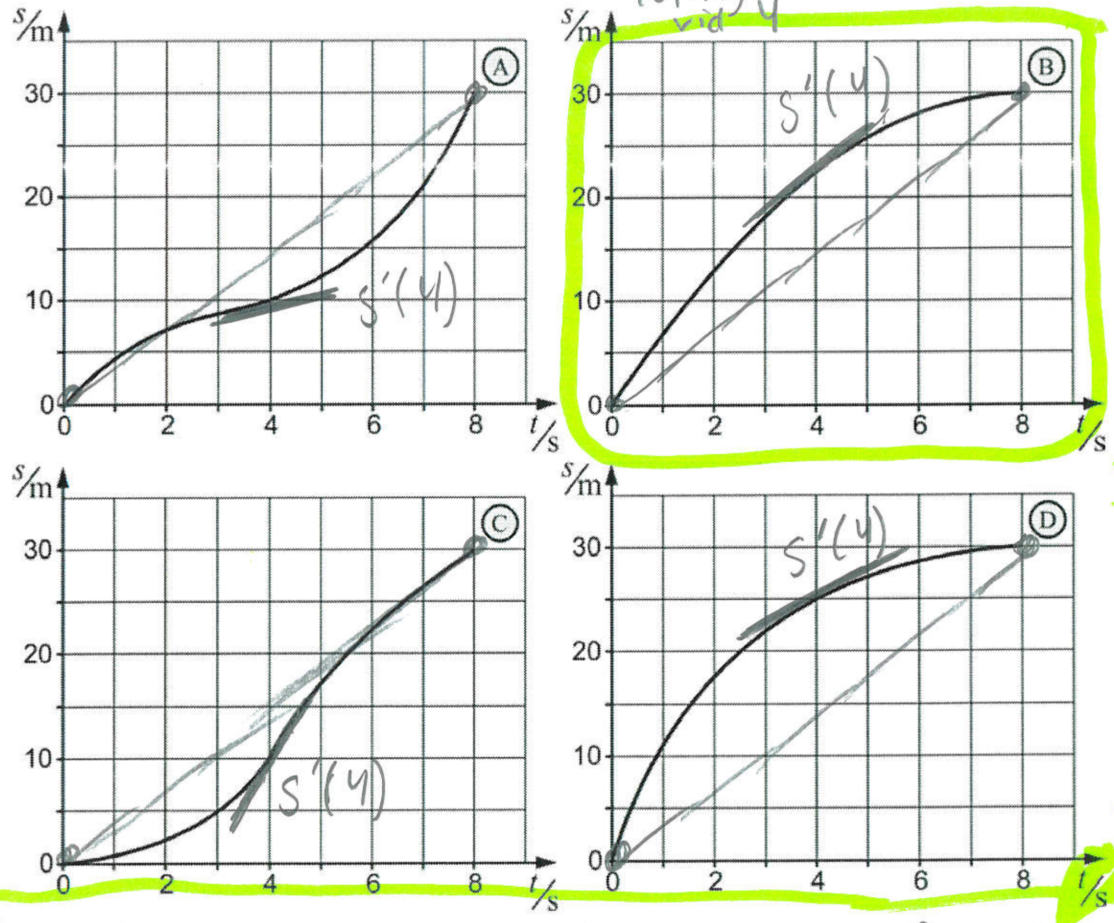
Gustav är ute på en träningsrunda med sin cykel. Han kommer fram till en uppförsbacke och t sekunder senare har han cyklat $s(t)$ meter uppför backen.



a) Förklara vad $s'(4)$ betyder i detta sammanhang. = Hastigheten efter 4 sekunder (1/0/0)

b) Förklara vad $\frac{s(8)-s(0)}{8-0}$ betyder i detta sammanhang. = Den genomsnittliga hastigheten under de första 8 sekunderna. (1/0/0)

c) Den sträcka som Gustav cyklat efter en viss tid kan beskrivas i ett diagram.
I vilket av diagrammen A-D nedan gäller det att $s'(4) = \frac{s(8)-s(0)}{8-0}$? Motsvaras grafiskt av en sekants lutning.
Förklara. Kurvans lutning vid 4 (1/1/0)



c) I diagram B motsvaras ungefär lutningen vid $t = 4$ av sekantens lutning, dvs

$$s'(4) = \frac{s(8)-s(0)}{8}$$

23. Utgå från funktionen $f(x) = x^3 - 12x$

a) Bestäm den *genomsnittliga lutningen* mellan punkterna där $x = -1$ och $x = 1$ (2/0/0)

Genomsnittlig lutning fås via ändringskvoten:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1) - f(-1)}{1-(-1)} = \left[\begin{array}{l} f(1) = 1^3 - 12\cdot 1 = -11 \\ f(-1) = (-1)^3 - 12\cdot(-1) = 11 \end{array}\right] = \frac{-11-11}{2} = -11$$

b) Bestäm ekvationen för en tangent i den punkt där $x = 1$ (2/1/0)

$f'(x) = 3x^2 - 12$

$y = f(1) = 1^3 - 12\cdot 1 = -11$

$k = f'(1) = 3\cdot 1 - 12 = -9$

$\boxed{\begin{array}{c}(1, -11) \\ k = -9\end{array}}$

$\Downarrow$

$-9\cdot 1 + m = -11 \Rightarrow m = -2$

Tangentens ekv: $y = -9x - 2$

c) Det finns två punkter för vilket det gäller att $f'(x) = 0$.
Bestäm koordinaterna för dessa båda punkter. (1/2/0)

$f'(x) = 3x^2 - 12$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 12 = 0$ $\quad +12 \quad +12$

$3x^2 = 12$

$x^2 = 4$

$x_1 = 2 \qquad x_2 = -2$

y-värdena ges av $f(x)$

$x = 2 \Rightarrow f(2) = 2^3 - 12\cdot 2 =$
$= 8 - 24 = -16$

$x = -2 \Rightarrow f(-2) = (-2)^3 - 12\cdot(-2)$
$= -8 + 24 = 16$

Punkterna:
$(2, -16)$
$(-2, 16)$

24. Bestäm ett exakt värde på lutningen till funktionen $f(x) = \dfrac{2}{x} + 3\sqrt{x}$
i den punkt där $x = 4$ (0/2/0)

$= \left[\begin{array}{c}\text{Skriv} \\ \text{om}\end{array}\right] = 2\cdot x^{-1} + 3\cdot x^{0,5}$

Lutningen ges av $f'(4)$

$f'(x) = 2\cdot(-1)\cdot x^{-2} + 3\cdot 0,5\cdot x^{-0,5} =$

$= -\dfrac{2}{x^2} + \dfrac{1,5}{\sqrt{x}}$

$f'(4) = -\dfrac{2}{4^2} + \dfrac{1,5}{\sqrt{4}} = -\dfrac{1}{8} + \dfrac{1,5}{2} = -\dfrac{1}{8} + \dfrac{6}{8} = \dfrac{5}{8}$

25. Lös ekvationen $2xe^x - e^x = 0$ (1/1/0)

Bryt ut $e^x \Rightarrow e^x(2x-1)=0$

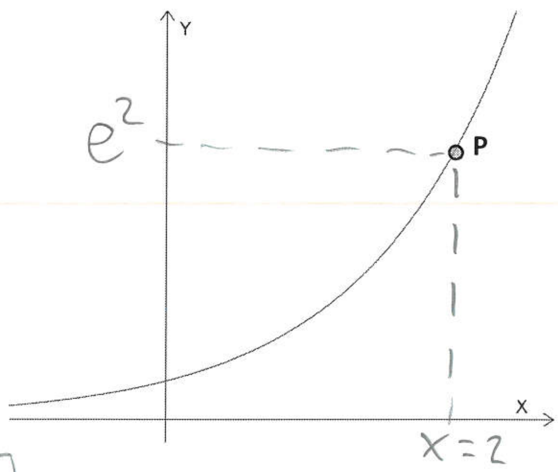
Nollproduktstänk:

$e^x = 0$ saknar lösning

$2x - 1 = 0$

$x = 0{,}5$

26. Figuren visar grafen till funktionen $f(x) = e^x$ och punkten **P**



För punkten **P** gäller att y-värdet är e^2.

En tangent till funktionen går igenom **P**.

Bestäm tangentens ekvation.

Svara exakt! (1/2/0)

$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$

Om y-värdet är e^2 måste x vara 2 $\Rightarrow \boxed{\begin{matrix}(2, e^2) \\ k = e^2\end{matrix}} \Rightarrow e^2 \cdot 2 + m = e^2$

$m = e^2 - 2 \cdot e^2 = -e^2$

Tangentens ekv: $y = e^2 \cdot x - e^2$

27. Bestäm ett närmevärde på $f'(4)$ till funktionen $f(x) = 2^{x-1}$ med hjälp av följande värden: (0/1/1)

$2^{1,9} \approx 3{,}73$	$2^{3,9} \approx 14{,}93$
$2^{2,1} \approx 4{,}29$	$2^{4,1} \approx 17{,}15$
$2^{2,9} \approx 7{,}46$	$2^{4,9} \approx 29{,}86$
$2^{3,1} \approx 8{,}57$	$2^{5,1} \approx 34{,}30$

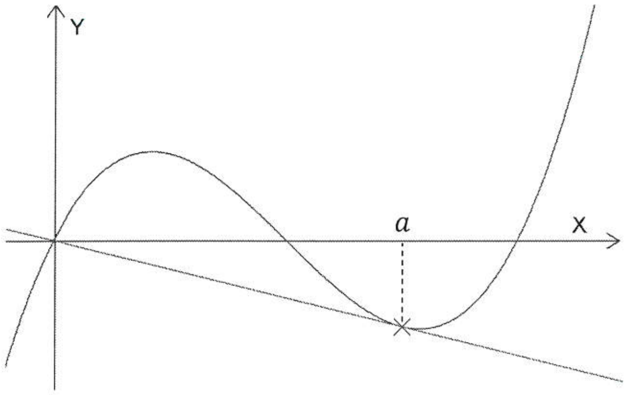
Svara med två decimaler!

Central ändringskvot: $f'(4) \approx \dfrac{f(4,1) - f(3,9)}{2 \cdot 0,1} = \left[\begin{matrix} f(4,1) = 2^{4,1-1} = 2^{3,1} \\ f(3,9) = 2^{3,9-1} = 2^{2,9}\end{matrix}\right] =$

$= \dfrac{2^{3,1} - 2^{2,9}}{0,2} \approx \left[\begin{matrix} 2^{3,1} \approx 8,57 \\ 2^{2,9} \approx 7,46\end{matrix}\right] \approx \dfrac{8,57 - 7,46}{0,2} = \dfrac{1,11}{0,2}$

$= 5{,}55$

28. Figuren nedan visar grafen till $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ med en tangent som går igenom origo. a är tangeringspunktens x-värde, $a > 0$



Bestäm ett exakt värde på a (0/1/2)

För tangeringspunkten gäller : $(a, f(a)) = (a, a^3 - 3\cdot a^2 + 2\cdot a)$

Lutningen ges av $f'(a)$: $k = f'(a) = 3\cdot a^2 - 6\cdot a + 2$

där $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$

$\boxed{\begin{matrix}(a, a^3 - 3a^2 + 2a) \\ k = 3a^2 - 6a + 2\end{matrix}}$ $\Rightarrow$ $k\cdot x + m = y$

$(3a^2 - 6a + 2)\cdot a + m = a^3 - 3a^2 + 2a$

$3a^3 - 6a^2 + 2a + m = a^3 - 3a^2 + 2a$

[Går igenom origo $\Rightarrow m = 0$]

$3a^3 - 6a^2 + \cancel{2a} = a^3 - 3a^2 + \cancel{2a}$

$2a^3 - 3a^2 = 0$

$a^2(2 - 3a) = 0$

$\Rightarrow a = \frac{3}{2}$

29. Nedanstående uppgift är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften.

Visa med hjälp av derivatans definition att derivatan till *varje* funktion av andra graden är en funktion av första graden. (0/2/2)

Varje funktion av andra graden $= f(x) = ax^2 + bx + c$

Derivatans definition (högerställd) $= f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \left[\begin{matrix} f(x) = ax^2 + bx + c \\ f(x+h) = a\cdot(x+h)^2 + b(x+h) + c \end{matrix}\right]$

$= \lim_{h \to 0} \frac{a\cdot(x+h)^2 + b(x+h) + c - (ax^2 + bx + c)}{h} =$

$= \left[\begin{matrix}(x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^2 \\ \text{– framför ( ) } \Rightarrow \text{ Byt tecken}\end{matrix}\right] = \lim_{h \to 0} \frac{ax^2 + 2axh + ah^2 + bx + bh + c - ax^2 - bx - c}{h}$

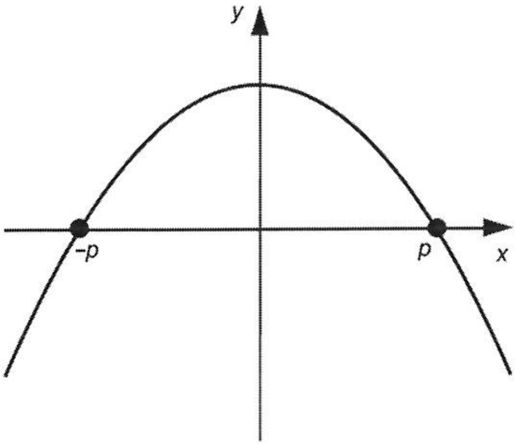
$= \left[\begin{matrix}\text{Förenkla} \\ \text{täljaren}\end{matrix}\right] = \lim_{h \to 0} \frac{2axh + ah^2 + bh}{h} = \left[\begin{matrix}\text{Bryt ut} \\ h \text{ ur täljaren}\end{matrix}\right]$

$= \lim_{h \to 0} \frac{h(2ax + ah + b)}{h} = \left[\begin{matrix}\text{Förkorta} \\ \text{bort } h\end{matrix}\right] = \lim_{h \to 0} 2ax + ah + b = [h = 0] = 2ax + b$

Första grad

V.S.V

30. Nedanstående uppgift är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften.



Figuren visar grafen till en andragradsfunktion $y = f(x)$ som har nollställena $x_1 = -p$ och $x_2 = p$. Vidare gäller att $f'(p) = k$

Visa att $f'(0{,}5p) = 0{,}5k$

(0/1/2)

Nollställena $x_1 = -p$ och $x_2 = p$ ger en möjlig faktorform av $f(x)$ till $f(x) = a\cdot(x-p)(x+p)$

I utvecklad form blir då $f(x) = ax^2 - ap^2$ Konstant (derivatan noll.)

Det ger $f'(x)$ till $f'(x) = 2ax - 0$

Enl. uppgift: $f'(p) = k \Rightarrow 2\cdot a\cdot p = k$

$a = \frac{k}{2p}$

Med a känt kan uttrycket för $f'(x)$ skrivas: $f'(x) = 2\cdot a\cdot x = \left[a = \frac{k}{2p}\right] =$

$= 2\cdot\frac{k}{2p}\cdot x = \frac{k}{p}\cdot x$

Vill visa $f'(0{,}5p) = 0{,}5k$

$VL = f'(0{,}5p) = \frac{k}{p}\cdot 0{,}5p = \left[\text{Förkorta } p\right] = k\cdot 0{,}5 = HL$

V.S.V