Del 2 – Med digitalt hjälpmedel – Fullständiga uträkningar krävs

D1. För funktionen f gäller att $f(x) = x \cdot 2^x$.
Bestäm ett närmevärde på $f'(3)$. *Endast svar krävs!*
Svara med 2 decimaler! (1/0/0)

nDeriv( ) el. Geogebra ger

$f'(3) \approx 24{,}64$

D2. Nedanstående uppgift är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften.

Värdet av en bil avtar med tiden enligt sambandet $V(t) = 260\,000 \cdot e^{-0{,}22 \cdot t}$
där V är värdet i kronor och t är tiden i år räknat från inköpstillfället.

a) Beräkna bilens värde då $t = 3$ (1/0/0)

b) Beräkna den hastighet med vilken bilens värde minskar då $t = 3$ (2/0/0)

a) Värdet ges av $V(3) = \left[\begin{array}{c}\text{Miniräknaren el.}\\ \text{Geogebra}\end{array}\right] \approx 134\,000$ kr

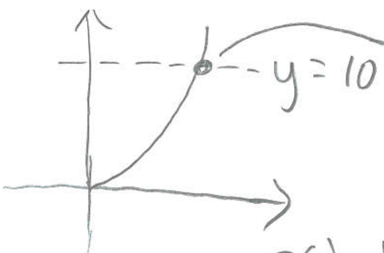
b) Hastigheten ges av $V'(3) = \left[\begin{array}{c}\text{Miniräknaren el.}\\ \text{Geogebra}\end{array}\right] = -29\,500$ kr/år

D3. För funktionen f gäller att $f(x) = x^{2,5}$.

a) Det finns en punkt på grafen där $f(x) = 10$.

Bestäm lutningen i denna punkt. *Svara med 2 decimaler!* (1/1/0)

Grafen:



Skärning ger $x \approx 2{,}512$

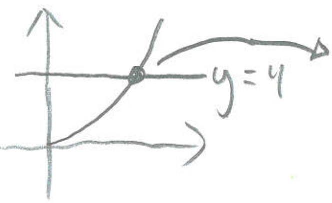
Lutningen: $f'(2{,}512) \approx 9{,}95$

OBS! Uppgiften kan lösas på många sätt!

b) Det finns en punkt på grafen där $f'(x) = 4$.

Bestäm koordinaterna för denna punkt. *Svara med 2 decimaler!* (1/1/0)

Exempel på lösning: Rita $f'(x)$:



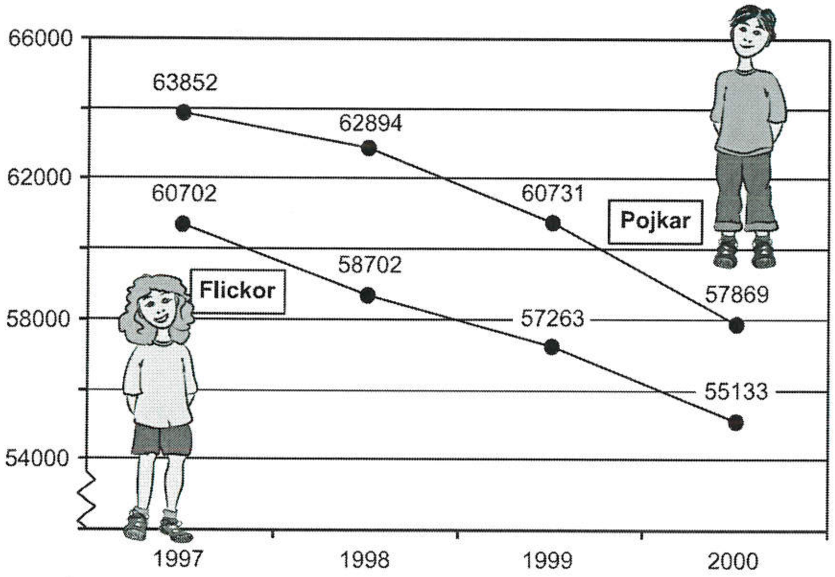
Skärning $x \approx 1{,}368$

y-värdet: $f(1{,}368) = 2{,}189$

Punktens koord.: $(1{,}37 \,;\, 2{,}19)$

D4. Nedanstående uppgift är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften.

Diagrammet visar antalet pojkar respektive flickor som gick årskurs 1 i den svenska kommunala grundskolan åren 1997-2000.



Beräkna den årliga genomsnittliga förändringshastigheten för *totala* antalet elever som gick årskurs 1 i den svenska kommunala grundskolan under perioden 1997-2000. (2/0/0)

Genomsnittlig förändring ges av ändringskvoten: $\frac{N(2000) - N(1997)}{2000 - 1997} = \left[\begin{array}{l}\text{Ur grafen: Totalt} \\ N(2000) = 113002 \\ N(1997) = 124554\end{array}\right]$

$= \frac{113002 - 124554}{3} \approx -3850$ barn/år

D5. En ny köptes mobil år 2016. Värdet på mobilen väntas därefter följa funktionen $V(x) = 8300 \cdot e^{-0,54x}$ där
V är värdet i kronor
x är antal år efter inköpet

a) Bestäm $V(2)$ och tolka ditt svar. (2/0/0)

$V(2) = \left[\begin{array}{l}\text{Miniräknaren el.} \\ \text{Geogebra}\end{array}\right] = 2818$ kr

Värdet på mobilen år 2018 är 2818 kr

b) Bestäm $V'(2)$ och tolka ditt svar. (2/0/0)

$V'(2) = \left[\begin{array}{l}\text{Miniräknaren el.} \\ \text{Geogebra}\end{array}\right] = -1522$ kr/år

År 2018 sjunker värdet på mobilen med 1522 kr/år

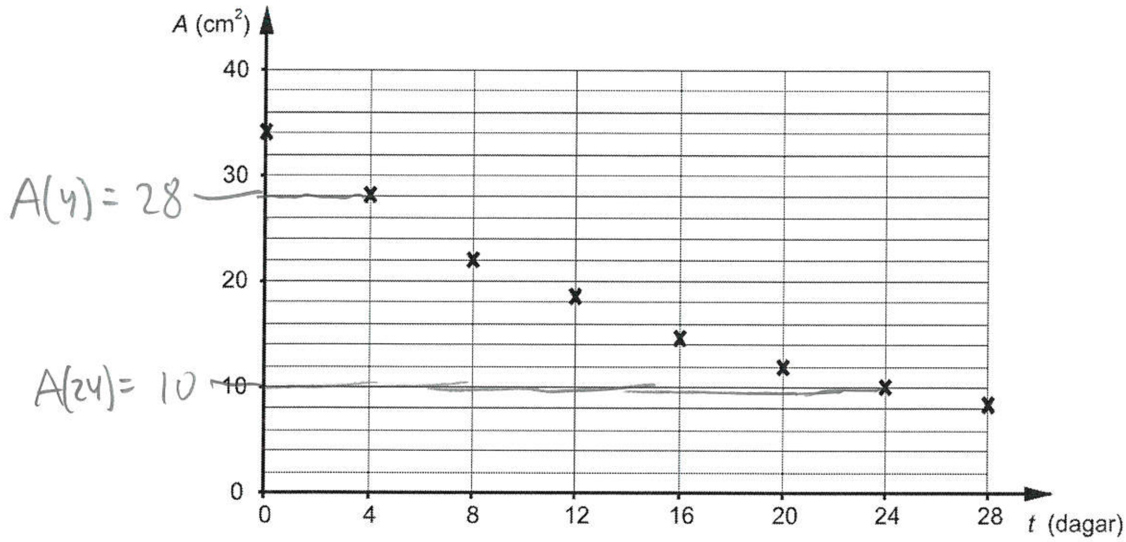
c) Hur många procent minskar mobilens värde med varje år?
Endast svar krävs! (0/1/0)

För. faktorn i decimalform fås antingen via:

$\frac{V(2)}{V(1)} \approx 0,583$ el. $e^{-0,54} \approx 0,583 \Rightarrow$ Minskning med 41,7 %/år

D6. Nedanstående uppgift är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften.

För att avgöra hur snabbt en sårskada läkte mättes dess area kl. 12.00 var fjärde dag. Resultatet visas i diagrammet nedan.



a) Bestäm hur stor minskningen av sårets area var i genomsnitt per dag från kl. 12.00 dag 4 till kl. 12.00 dag 24. (2/0/0)

Om mätvärdena anpassas till en exponentialfunktion fås sambandet $A = 34 \cdot 0{,}95^t$ där A är arean i kvadratcentimeter och t är tiden i dagar.

b) Efter hur lång tid är arean hos sårskadan 3 cm^2 enligt detta samband? (2/0/0)

c) Efter hur lång tid minskar sårskadans area med 1 cm^2/dag? (0/1/0)

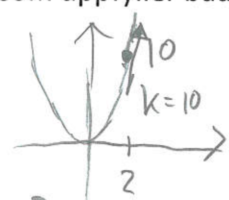
a) "Genomsnitt" ⇒ ändringskvoten ⇒ $\frac{A(24)-A(4)}{24-4}$ = [Ur grafen: A(24)=10 A(4)=28]

$= \frac{10-28}{20} = -0{,}9$ cm^2/dag

b) "A = 3" ex genom "lös" el. skärning med. grafen: t = 47 dagar

c) "A' = -1" ex genom "lös" el skärning med derivatagrafen: t = 10,8 dagar

D7. Ange valfri andragradsfunktion som uppfyller båda villkoren
$f(2) = 10$ och $f'(2) = 10$ (0/2/0)



Utgå t.ex från

$f(x) = ax^2 + c \Rightarrow f'(x) = 2ax$

Om $f'(2) = 10$ måste $2a \cdot 2 = 10$

dvs $a = \frac{10}{4} = 2{,}5$

⇒ exempelvis $f(x) = 2{,}5x^2$ (det finns oändligt med svar)

Om $f(2) = 10$ kan c bestämmas

$2{,}5 \cdot 2^2 + c = 10$

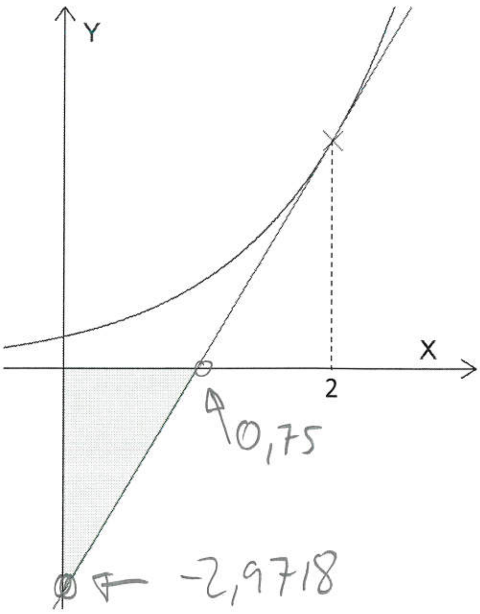
$c = 0$

D8. Figuren till höger visar grafen till $f(x) = e^{0,8x}$, och en tangent inritad med tangeringspunkt vid $x = 2$

Tangenten bildar tillsammans med koordinataxlarna en rätvinklig triangel.

Bestäm arean av denna triangel.

Svara med 2 decimaler! (1/2/0)



Tangentens ekvation kan bestämmas exakt el. numeriskt

Här går numerisk lösning lika bra $\Rightarrow$ "Tangent" ger

$y = 3,962x - 2,9718$

Tangentens skärning med y-axeln: $-2,9718$

Tangentens skärning med x-axeln: $x = 0,75$

Arean $= \frac{b \cdot h}{2} = \frac{2,9718 \cdot 0,75}{2} = 1,11$ a.e

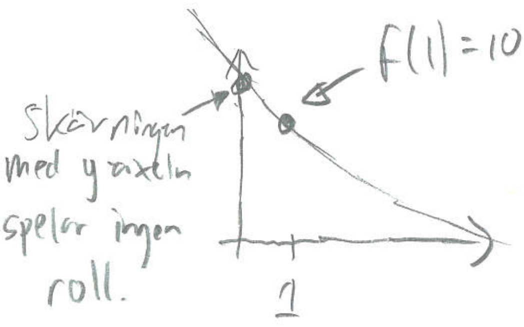
(den kan också bestämmas via en s.k integral)

D9. Ange en valfri funktion, f, för vilken det gäller att

$f(x) > 0$ för alla x
$f'(x) < 0$ för alla x
$f(1) = 10$

(0/2/0)

"Alltid pos. y-värden"
"Ständigt på väg nedåt" $\Rightarrow$ Exp. funktion!



Det finns många lösningsvägar!

t.ex $\rightarrow$ Välj förändringsfaktor själv!

$\rightarrow$ "Exp. regression"

ex: $F = 0,8$

$\Rightarrow$ Startvärde $= \frac{10}{0,8} = 12,5$

Exempel: $\Rightarrow y = 12,5 \cdot 0,8^x$

ExpReg ← Miniräknare

RegressionExp ← Geogebra

(välj andra punkt själv)

$y = 12 \cdot 0,833...^x$

D10. En kopp med varmt te ställs in i ett rum klockan 12.00, och temperaturen i teet antas följa modellen $T(x) = 70e^{-0.12x} + 25$ där $T(x)$ är temperaturen i °C och x är antalet minuter efter som gått sedan tekoppen ställdes in.

a) Beräkna **och tolka** betydelsen av $T(0)$ (2/0/0)

$T(0) = \begin{bmatrix} \text{Miniräknaren el.} \\ \text{Geogebra} \end{bmatrix} = 95$

Teets temp. var 95°C när det ställdes in, dvs kl. 12.00

b) Hur många gånger snabbare svalnar teet klockan 12.10 jämfört med klockan 12.30 ? (1/1/0)

"Hastighet" ⇒ Derivata

12.10 ⇒ $x = 10$

12.30 ⇒ $x = 30$

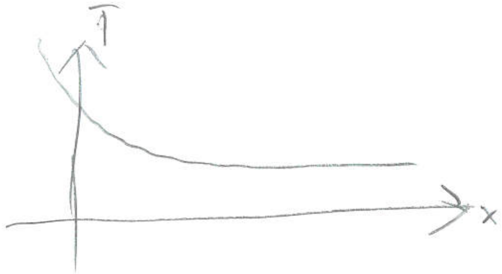
$T'(10) = \begin{bmatrix} \text{Miniräknaren} \\ \text{el.} \\ \text{Geogebra} \end{bmatrix} = -2{,}53$

$T'(30) = -0{,}23$

"Gånger större" = $\dfrac{T'(10)}{T'(30)}$ = 11 ggr

c) När tekoppen har stått på rummet under lång tid är temperaturen konstant. Vad är temperaturen då?
Endast svar krävs! (0/1/0)

Grafen visar att temp planar ut mot 25



⇒ 25°C (= rumstemp.)

d) Efter en viss tid har temperaturen sjunkit till hälften av vad den var när teet ställdes in.
Hur snabbt sjunker temperaturen just då? (0/2/0)

$T(0) = 95$ °C

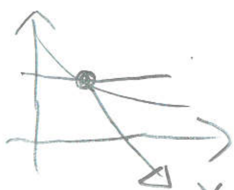
"Hälften av $T(0)$" $= \dfrac{95}{2} = 47{,}5$°C

"Efter hur lång tid är temp. 47,5°C?"

→ "lös" el. → "skärning"

lös({T = 47,5})

$x = 9{,}458$



$x = 9{,}458$

Derivatan vid 9,458

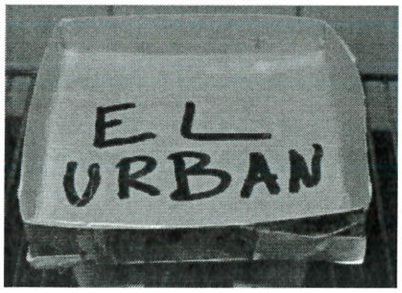
⇒ $T'(9{,}548)$

$= -2{,}7$ °C/min

D11. Urban ska bygga en låda av en kvadratisk bit med sidan 20 cm av en mjölkkartong.

Lådan byggs genom att Urban skär loss kvadrater med sidan x ifrån bitens fyra hörn och viker upp kanterna.

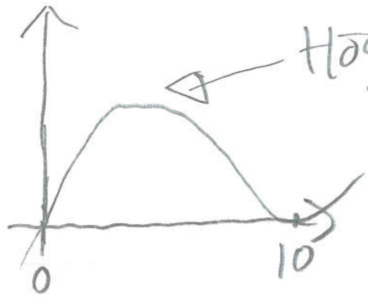
Lådans volym kan då bestämmas med formeln



$$V(x) = 4x^3 - 80x^2 + 400x$$

a) Bestäm vilka mått lådan har för att dess volym ska bli så stor som möjligt. (0/2/0)

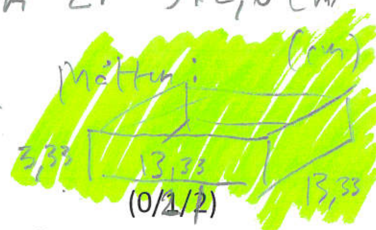
Ritas grafen först:



Högsta värdet
$V(3{,}33) = 592{,}6$

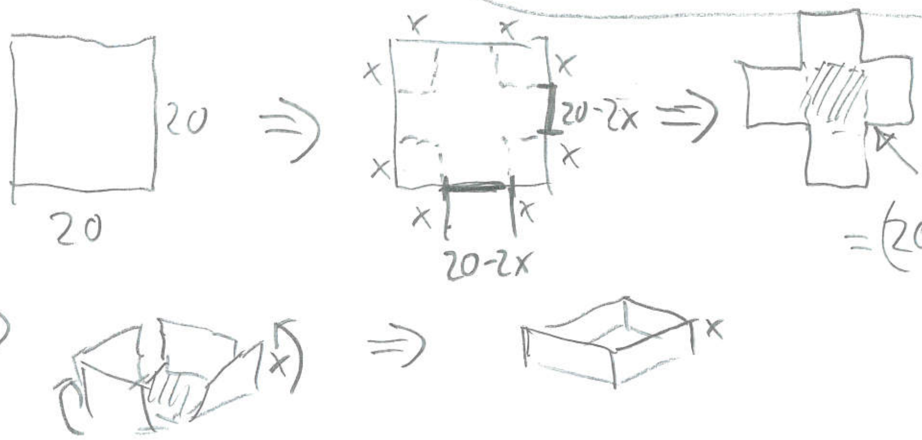
$\Rightarrow$ Lådans höjd är 3,33 cm. Dess volym är 592,6 cm³

$\Rightarrow$ Basarean $= \dfrac{592{,}6}{3{,}33} = 177{,}78\ \text{cm}^2$ $\Rightarrow$ sidan $\sqrt{177{,}78}$ $\Rightarrow$



b) Visa hur Urban kommit fram till formeln ovan. (0/1/2)

Strategi:



Basarea $= (20-2x)^2$

Volymen blir basarean · höjden =

$= (20-2x)^2 \cdot x =$

$= 4x^3 - 80x^2 + 400x$

VSV.

D12. För en exponentialfunktion, f, gäller att $f(4) = 1200$ och $f'(4) = 15$.

Bestäm värdet av $f(0)$ (0/1/2)

Antingen "Manuellt" eller via Geogebra.

→ "Manuellt"

$f(x) = C \cdot e^{k \cdot x}$

$f'(x) = C \cdot e^{kx} \cdot k = C \cdot k \cdot e^{kx}$

$f(4) = 1200 \Rightarrow C \cdot e^{k \cdot 4} = 1200$

$f'(4) = 15 \Rightarrow C \cdot k \cdot e^{k \cdot 4} = 15$

$\dfrac{"f'(4)"}{"f(4)"} = k = \dfrac{15}{1200}$

Med k känt kan C bestämmas:

$f(0) = C = \dfrac{1200}{e^{k \cdot 4}} = \dfrac{1200}{e^{15/1200 \cdot 4}} \approx 1141,5$

→ "Geogebra"

* Sätt ut punkten (4, 1200) = A
* Sätt ut en flyttbar punkt på y-axeln = B
* Genomför en regression med de två punkterna "RegressionExp({A, B})"
* Bestäm lutningen i A
* Flytta B tills lutningen blir 15

$\Rightarrow f(0) \approx 1141,5$

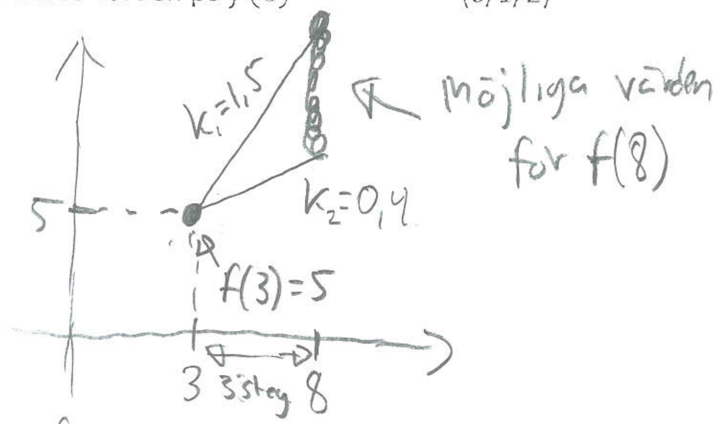
D13. För en funktion, f, gäller att

$0{,}4 \leq f'(x) \leq 1{,}5$ i intervallet $0 \leq x \leq 8$

$f(3) = 5$

Värdet av $f(8)$ kan av beskrivningen ovan anta många olika värden.
Bestäm kvoten mellan det största och det minsta av dessa värden på $f(8)$ (0/1/2)

Tolkning av informationen: (grov skiss)

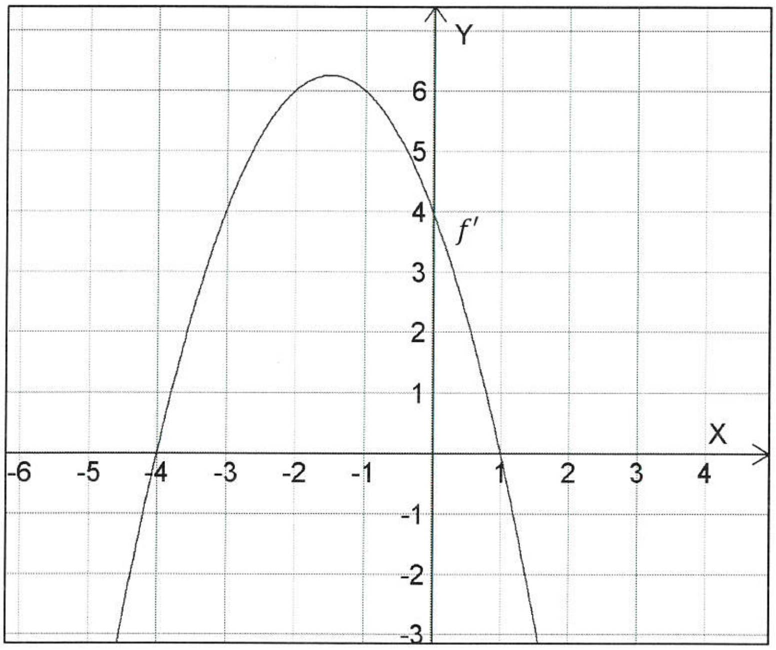


Största värdet för $f(8)$ fås via $5 + 1,5 \cdot 3 = 9,5$

Minsta värdet för $f(8)$ fås via $5 + 0,4 \cdot 3 = 8,4$

Kvoten mellan dessa värden $= \dfrac{9,5}{8,4} = 1,13$

D14. *Derivatafunktionen*, f', till ett tredjegradspolynom, f, visas nedan.
Grafen till f går igenom origo.



a) En tangent till f dras där $x = 0$. Bestäm dess ekvation.
Endast svar krävs! (0/1/0)

$\boxed{\begin{matrix}(0, f(0)) \\ k = f'(0)\end{matrix}}$ $f(0) = 0$ (enl. texten)
$f'(0) = 4$ (enl. grafen) $\Rightarrow$ Tangentens ekv.
$y = 4x + 0 = 4x$

b) Bestäm värdet av $\dfrac{f'(-1)}{f(-1)}$ (0/1/3)

$f'(-1)$ fås ur grafen: $f'(-1) = 6$
$f(-1)$ fås via $f(x)$, som i sin tur fås via ett uttryck för $f'(x)$ "baklängesderiverat":

$f' = \left[\text{Regression}\right] = -x^2 - 3x + 4$

$\Downarrow$

Deriveringsreglerna baklänges "Höj upp och dela med det nya"

$f(x) = -\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3x^2}{2} + 4x$ (finns även som färdigt kommando i Geogebra)

$f(-1) = \left[\begin{matrix}\text{miniräknare el} \\ \text{Geogebra}\end{matrix}\right] \approx -5{,}16$ $\Rightarrow \dfrac{f'(-1)}{f(-1)} = -1{,}16$