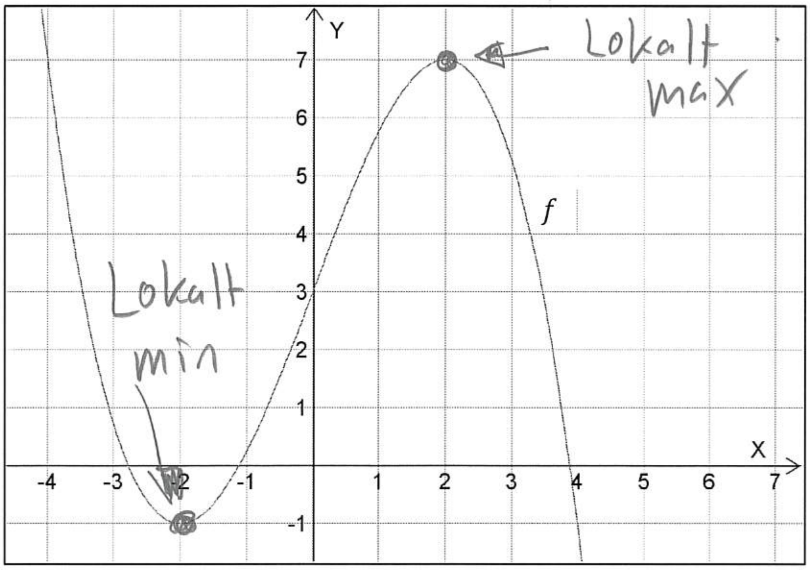
FACIT

Extrempunkter

Del 1 – Utan digitalt hjälpmedel

1. Figuren nedan visar grafen till en tredjegradsfunktion, f



Funktionen har två extrempunkter. Ange koordinaterna till båda dessa samt vilken typ av extrempunkt det handlar om. (1/0/0)

Max: $(2, 7)$

Min: $(-2, -1)$

2. Hos funktionen $f(x) = 12x - 2x^2$ finns en extrempunkt. Ange x-koordinaten för denna. (1/0/0)

Extrempunkter fås där $f'(x) = 0$

$f'(x) = 12 - 4x \qquad f'(x) = 0 \Rightarrow 12 - 4x = 0$

$x = 3$

3. För andragradsfunktionen f gäller att $f(x) = x^2 + 2x - 4$.

Funktionen har en extrempunkt. Ange koordinaterna för denna punkt, samt vilken typ av extrempunkt det handlar om. (2/0/0)

$f'(x) = 2x + 2 \qquad f'(x) = 0 \Rightarrow 2x + 2 = 0$

$x = -1$

y-koord fås via: $f(-1) = (-1)^2 + 2\cdot(-1) - 4$

$= 1 - 2 - 4 = -5$

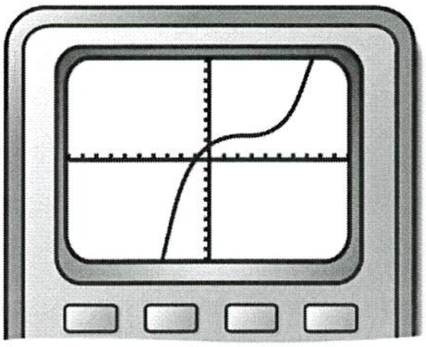
"Glad andragradare"

$\Rightarrow$ min

Min: $(-1, -5)$

4. Uppgiften nedan är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften.

Kalle har fått i uppgift att ta reda på hur grafen till en viss tredjegradsfunktion ser ut. Han ritar upp grafen på sin räknare, se figur.



Han säger: "Det ser ut som om grafen har en terrasspunkt!"

Kan Kalle, utifrån den bild han ser på sin räknare, vara säker på att grafen har en terrasspunkt? Motivera ditt svar. (1/0)

Nej, för att det ska vara en terrasspunkt krävs att med säkerhet avgöra att derivatan är noll. Det kan i princip inte göras utan att göra någon derivatastudie.

5. Lös ekvationen $f'(x) = 0$ om...

a) $f'(x) = 2x - 5$ (1/0/0)

$2x-5=0 \Rightarrow 2x=5$

$x=\frac{5}{2}=2{,}5$

b) $f'(x) = x^2 - 6x - 16$ (2/0/0)

"p-q"

$+\underline{3}\ \underline{3}\cdot\underline{3}\ +\underline{16}$

+3

$3\cdot 3+16=9+16=25 \Rightarrow \boxed{5}$

$x_1=3+5=8 \quad x_2=3-5=-2$

c) $f'(x) = x^2(4-x)^2$ (0/1/0)

Nollproduktstänk.

$x^2=0 \qquad (4-x)=0 \qquad (4-x)=0$

$x_1=0 \quad x_2=0 \qquad x_3=4 \qquad x_4=4$

6. Utgå från funktionen $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x$.

Ekvationen $f'(x) = 0$ har lösningarna $x_1 = 1$ och $x_2 = 3$

a) Ange koordinaterna för funktionens extrempunkter. (2/0/0)

y-koord fås genom att använda x-värdena i f(x):

$x=1 \Rightarrow y = f(1) = -1^3 + 6\cdot 1^2 - 9\cdot 1 = -1 + 6 - 9 = -4$ $\quad (1,-4)$

$x=3 \Rightarrow y = f(3) = -3^3 + 6\cdot 3^2 - 9\cdot 3 = -27 + 54 - 27 = 0$ $\quad (3,0)$

b) Bestäm värdet av $f'(0)$ och $f'(2)$ och $f'(4)$.

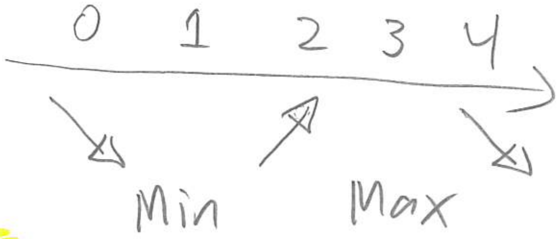
Använd svaren för att avgöra vilken typ av extrempunkter det handlar om. (1/1/0)

$f'(x) = -3x^2 + 12x - 9$

$f'(0) = -9$

$f'(2) = -3\cdot 2^2 + 12\cdot 2 - 9 = 3 \Rightarrow$

$f'(4) = -3\cdot 4^2 + 12\cdot 4 - 9 = -9$



Min vid x=1 Max vid x=3

c) Ta själv fram de båda lösningarna till ekvationen $f'(x) = 0$ (2/0/0)

$f'(x) = -3x^2 + 12x - 9$

$f'(x) = 0 \Rightarrow -3x^2 + 12x - 9 = 0 \quad [\div -3]$

$x^2 - 4x + 3 = 0$ "p-q"

$+2 \quad \boxed{1}$

$x_1 = 2 + 1 = 3$

$x_2 = 2 - 1 = 1$

7. För funktionen f gäller att $f(x) = 2x^3 - 6x + 1$.

Bestäm koordinaterna för funktionens extrempunkter, samt avgör vilken typ av extrempunkter det handlar om. (3/1/0)

1) Hitta x-värdena genom att lösa $f'(x) = 0$

$f'(x) = 6x^2 - 6 \qquad f'(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 - 6 = 0 \quad x^2 = 1$

$x_1 = 1 \quad x_2 = -1$

2) Beräkna y-värdet för varje x-värde:

$x = 1 \Rightarrow y = f(1) = 2\cdot 1^3 - 6\cdot 1 + 1 = -3$

$x = -1 \Rightarrow y = f(-1) = 2\cdot(-1)^3 - 6\cdot(-1) + 1 = 5$

Max: $(-1, 5)$

Min: $(1, -3)$

3) Kolla typ av extrempunkt, t.ex mha derivata

$f'(0) = -$ $\qquad f'(2) = +$ (endast tecknet spelar roll)

(se uppgift 7)

8. För funktionen f gäller att $f(x) = -3x^3 - 9x^2 + 4$.

Bestäm koordinaterna för funktionens extrempunkter, samt avgör vilken typ av extrempunkter det handlar om. (3/1/0)

1: $f'(x) = -9x^2 - 18x$ $\quad f'(x) = 0 \Rightarrow -9x^2 - 18x = 0$ $[\div -9]$

$x^2 + 2x = 0$ [pq el. faktorform]

$x(x+2) = 0$

$x = 0 \quad x = -2$

2: $x = 0 \Rightarrow y = 4$

$x = -2 \Rightarrow y = -3 \cdot (-8) - 9 \cdot 4 + 4 =$
$= 24 - 36 + 4 = -8$

3: $f'(1) = -$
$f'(-1) = +$
$f'(-3) = -$

$\Rightarrow$ −2 0

Min Max

Min: $(-2, -8)$
Max: $(0, 4)$

9. För funktionen f gäller att $f'(x) = 2x(x-2)^2$.

a) Hur många extrempunkter har funktionen? (0/1/0)

$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x(x-2)(x-2) = 0$ Nollprod.

$x_1 = 0 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 2$

Två olika x-värden $\Rightarrow$ Två extrempunkter

b) Vid vilka x-värden finns extrempunkterna, och vilken typ av extrempunkt handlar det om vid respektive x-värde? (0/3/0)

x-värdena 0 och 2 (se a)-uppg.)

Till vänster om $x = 0$: $f'(-10) = -20 \cdot (-22)^2$
t.ex
$- \cdot + \Rightarrow -$

mellan $x = 0$ och $x = 2$: $f'(1) = 2 \cdot 1 \cdot (1-2)^2$
$+ \cdot + \Rightarrow +$

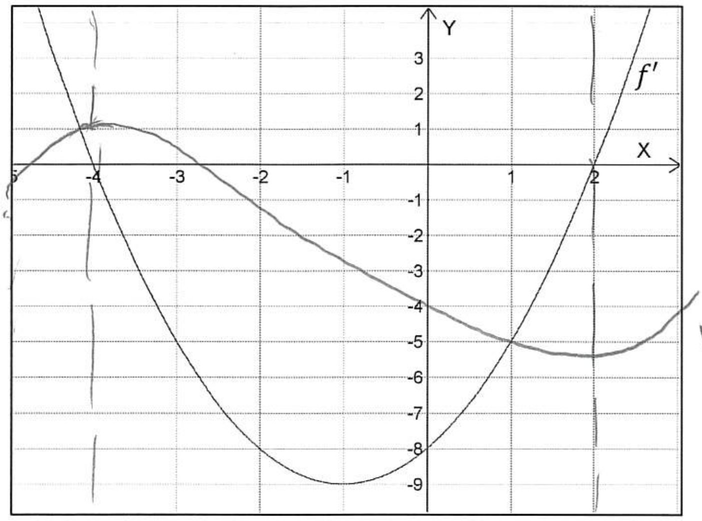
Till höger om $x = 2$: $f'(10) = 20 \cdot (18)^2$
t.ex
$+ \cdot + \Rightarrow +$

$\Rightarrow$ 0 2

Min Terass

Min. vid $x = 0$
Pos. terass vid $x = 2$

10. Figuren nedan visar grafen till $y = f'(x)$



OBS! Grafen visar Derivatan till funktionen som det frågas om.

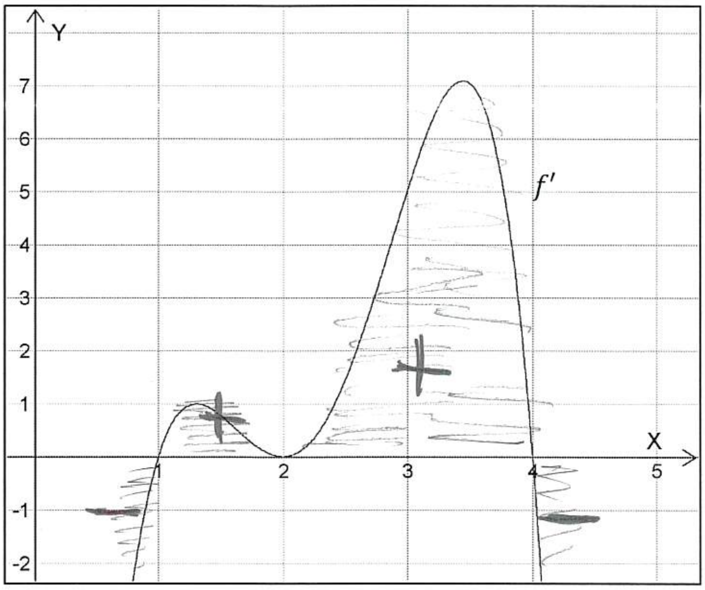
Skiss av f

För vilket värde på x har f en lokal minimumpunkt? (0/1/0)

Vid $x = -4$ och $x = 2$ finns extrempunkter till f. Vid $x = 2$ gäller: Till vänster ↘ Min Till höger ↗

Alltså: Min vid $x=2$

11. Figuren nedan visar grafen till $y = f'(x)$



Ange vilken typ av extrempunkter funktionen f har och vid vilka x-värden dessa finns (0/3/0)

x-värdena finns där $f' = 0 \Rightarrow x_1 = 1 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 4$

(dubbelrot)

Vid $x = 1$: − ↘ + ↗ Min

Vid $x = 2$: + ↗ + ↗ Terass

Vid $x = 4$: + ↗ − ↘ Max

Min vid $x=1$:
Pos terass vid $x=2$
Max vid $x=4$

12. Ta fram ett funktionsuttryck till *valfri* tredjegradsfunktion som har en terasspunkt vid $x = 1$. (0/0/2)

Terasspunkt vid $x=1 \Rightarrow$ Derivatan ska ha en dubbelrot vid $x = 1$

$\Rightarrow f' = (x-1)(x-1) = x^2 - 2x + 1$

För att få funktionsuttrycket krävs "baklängesderivering":

$f' = x^2 - 2x + 1 + 0$

$f = \frac{x^3}{3} - x^2 + x +$ ev konstant

13. För funktionen $f(x) = 2x^3 + ax^2 + 4x - \frac{ax}{3}$ finns två värden på konstanten a för vilken funktionen har en terasspunkt.

Bestäm dessa båda värden på konstanten a (0/1/3)

$f' = 6x^2 + 2ax + 4 - \frac{a}{3}$

För terasspunkt krävs att derivatan har en dubbelrot, dvs att ekvationen $f' = 0$ har två likadana lösningar.

$f' = 0 \Rightarrow 6x^2 + 2ax + 4 - \frac{a}{3} = 0$ [Dela på 6 och kör p-q]

$x^2 + \frac{a}{3}x + \frac{2}{3} - \frac{a}{18} = 0$

$-\frac{a}{6} \pm \sqrt{\frac{a}{6}\cdot\frac{a}{6} - \frac{2}{3} + \frac{a}{18}}$

För dubbelrot krävs att $\boxed{} = 0 \Rightarrow \frac{a^2}{36} - \frac{2}{3} + \frac{a}{18} = 0$

$\frac{a^2}{36} - \frac{24}{36} + \frac{2a}{36} = 0$

[pq] $\rightarrow a^2 + 2a - 24 = 0$

$-1 \pm \sqrt{1\cdot 1 + 24}$

$-1 \pm \sqrt{25} = \boxed{5}$

$a_1 = -1 + 5 = 4$

$a_2 = -1 - 5 = -6$

$\Rightarrow a_1 = 4$ och $a_2 = -6$