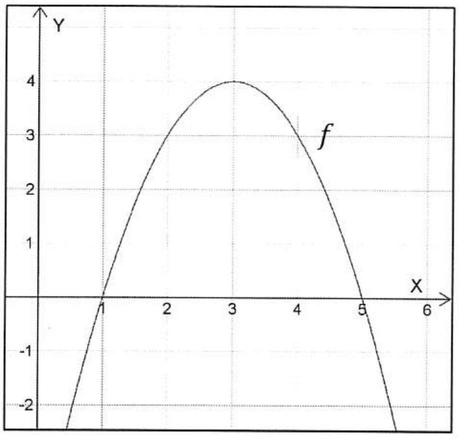
FACIT

Största och minsta värde

Del 1 – Utan digitalt hjälpmedel

1. Figuren nedan visar grafen till en andragradsfunktion, f, som är definerad för alla x.



"Värde" ⇒ y-värde

a) Ange största och minsta värdet för funktionen f. (2/0/0)

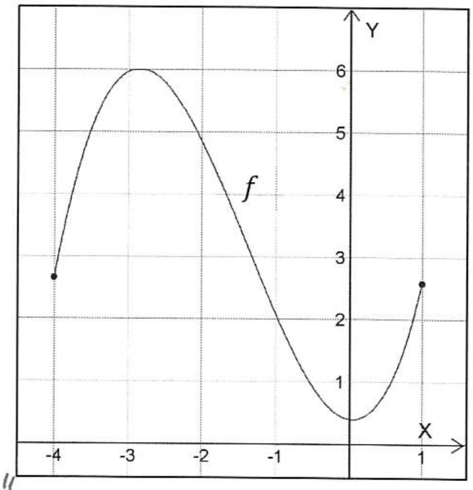
Största värdet är 4
Minsta värde saknas (dvs det finns ingen lägsta punkt)

b) Ange tre valfria x-värden där funktionen f är *växande* (1/0/0)

Alla x-värden till vänster om $x=3$

Ex: $x=2$ $x=1$ $x=0$

2. Figuren till höger visar grafen till en tredjegradsfunktion, f, med en viss definitionsmängd.



"y-värdet"

a) Bestäm största och minsta värdet för f. (1/0/0)

Största värdet $=6$
Minsta värdet $\approx 0{,}4$

b) Skriv definitionsmängden till f med matematiska symboler. (0/1/0)

"x-värdena mellan −4 och 1"

⇒ $-4 \leq x \leq 1$

3. För funktionen f gäller att $f(x) = 2x^2 + 8x - 1$

Bestäm funktionens minsta värde med hjälp av derivata. (2/0/0)

Minsta värdet finns i vändpunkten. Där är $f'(x)=0$

$f'(x) = 4x + 8$

$f'(x)=0 \Rightarrow 4x+8=0 \Rightarrow x=-2$

Värdet vid $x=-2$ ges av $f(-2)$

$f(-2) = 2\cdot(-2)^2 + 8\cdot(-2) - 1$

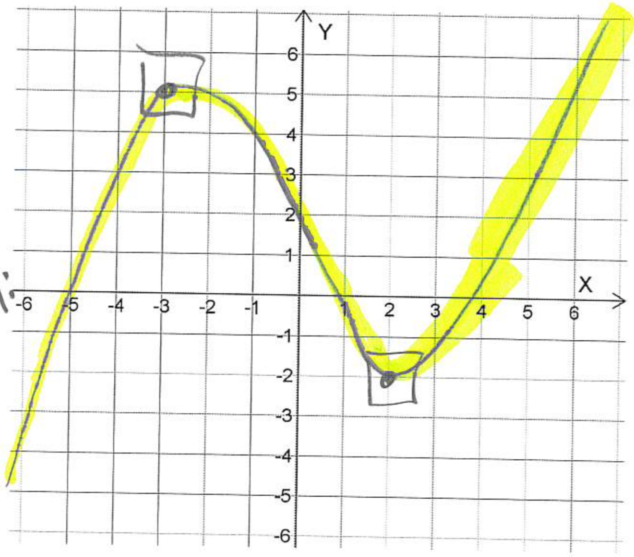
$= 8 - 16 - 1 = -9$

4. Nedan visas en teckentabell över en funktion, *f*.

a) Gör en **grov skiss** över hur funktionens graf ser ut i koordinatsystemet. (1/0/0)

x		-3		2	
f	↗	5	↘	-2	↗
f '	+	0	-	0	+

Exempel:



b) Ange koordinaterna för *extrempunkterna* till f. (1/0/0)

Max: $(-3, 5)$

Min: $(2, -2)$

c) Ange alla värden på x där funktionen f är *växande*. (1/1/0)

"Alla x till höger om $x=2$" $\Rightarrow$ $x>2$

och

"Alla x till vänster om $x=-3$" $\Rightarrow$ $x<-3$

5. För tredjegradsfunktionen f gäller att $f(x) = -2x^3 + 6x^2 - 1$.

Bestäm funktionens största och minsta värde i intervallet $0 \leq x \leq 3$ (2/1/0)

1. Ta fram extrempunkternas x-koord.
2. Beräkna värdet i kanterna och extrempunkternas x.

1. $f'(x) = -6x^2 + 12x$

$f'(x) = 0 \Rightarrow -6x^2 + 12x = 0$

Bryt ut x: $x(-6x + 12) = 0$

$x = 0$ $x = 2$

2. $x = 0 \Rightarrow f(0) = -2 \cdot 0^3 + 6 \cdot 0^2 - 1 = -1$

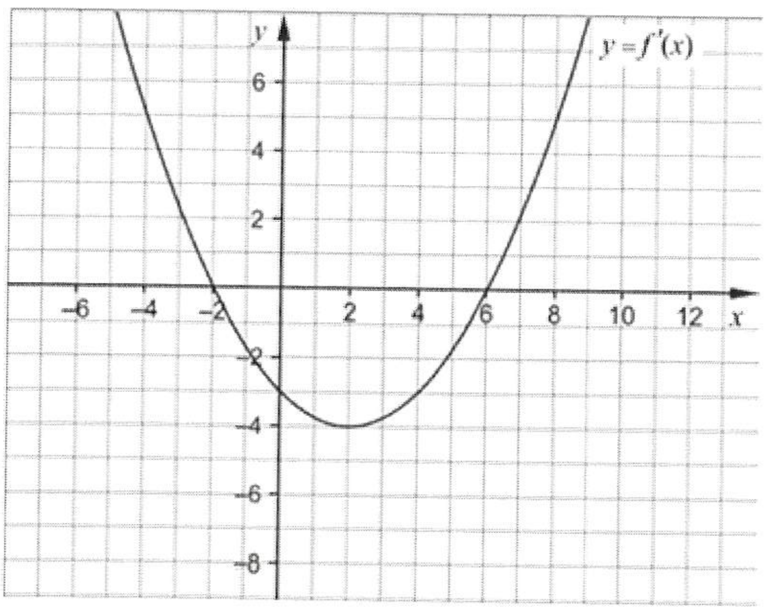
$x = 2 \Rightarrow f(2) = -2 \cdot 2^3 + 6 \cdot 2^2 - 1 = -16 + 24 - 1 = 7$

$x = 3 \Rightarrow f(3) = -2 \cdot 3^3 + 6 \cdot 3^2 - 1 = -54 + 54 - 1 = -1$

Största värdet är 7 Minsta värdet är −1

6. Uppgiften nedan är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften.

I figuren nedan visas grafen till *derivatan*, $y = f'(x)$, för funktionen f.



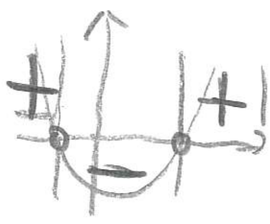
a) Bestäm $f'(4)$ med hjälp av grafen. *Endast svar fordras* (1/0/0)

b) För vilket värde på x har grafen till funktionen f en minimipunkt? Förklara. (0/2/0)

a) Grafens y-värden visar f' $\Rightarrow$ Läs av grafen där $x = 4$

$f'(4) = -3$

b) Minimipunkt innebär att derivatan har teckenväxlingen − 0 + $\Rightarrow$



$\Rightarrow$ x-värdet 6

7. För tredjegradsfunktionen f gäller att $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x + 4$.

Bestäm funktionens största och minsta värde i intervallet $-2 \le x \le 3$ (1/2/0)

Extrem-punkter : $f'(x) = -6x^2 + 6x + 12 = 0$ [Dela på -6]

$x^2 - 1x - 2 = 0$ [pq]

$\frac{1}{2}$ $\sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2}$

$x = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} \Rightarrow x_1 = 2$, $x_2 = -1$

Bestäm värden i extrempunkterna och kanterna :

$x = -2 \Rightarrow -2 \cdot (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 + 12 \cdot (-2) + 4 = 16 + 12 - 24 + 8 = 8$

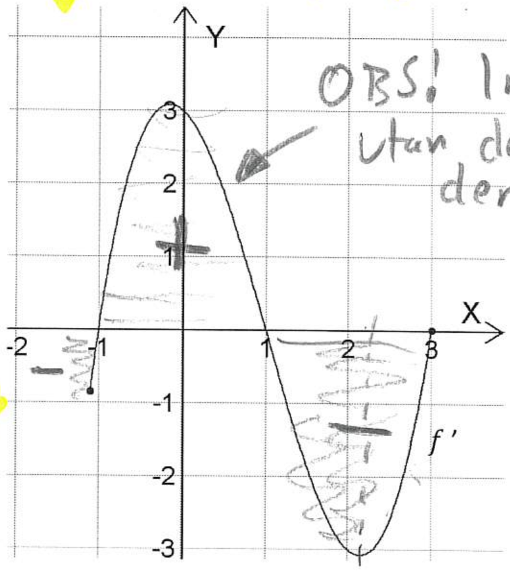
$x = -1 \Rightarrow -2 \cdot (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 + 12 \cdot (-1) + 4 = 2 + 3 - 12 + 4 = -3$

$x = 2 \Rightarrow -2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2 + 4 = -16 + 12 + 24 + 4 = 24$

$x = 3 \Rightarrow -2 \cdot 3^3 + 3 \cdot 3^2 + 12 \cdot 3 + 4 = -54 + 27 + 36 + 4 = 13$

Största värdet är 24 (då $x = 2$) Minsta värdet är -3 (då $x = -1$)

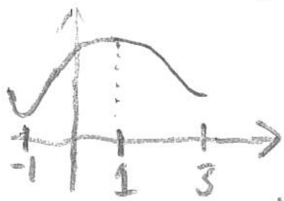
8. Grafen till höger visar derivatafunktionen f' till funktionen f.



OBS! Inte f utan dess derivata funk.

a) Ange x-värdet för största värdet till f (0/1/0)

Skiss av f :



$\Rightarrow$ Största värdet där $x = 1$

b) Ange de x-värden där funktionen f är *växande* (0/2/0)

f är växande där $f' > 0$

dvs där derivatagrafen har pos. värden $\Rightarrow$

"Alla x mellan -1 och 1" $\Rightarrow$ $-1 < x < 1$

c) Ange det x-värde där funktionen f avtar som mest. (0/0/1)

Avtar som mest $\Rightarrow$ Derivatan som mest negativ

$\Rightarrow$ x-värdet där derivatan är lägst

$\Rightarrow$ $x \approx 2,2$

9. För funktionen f gäller att $f(x) = -0{,}5x^3 - 1{,}5x^2 + 5x + 8$

Ange koordinaterna för den punkt där f växer som snabbast. (0/0/2)

Söker "Lutningsfunktionens största värde"

1) Ta fram lutningsfunktionen (= derivatan)

$L = f'(x) = -1{,}5x^2 - 3x + 5$

2) Ta fram extrempunkten till L

$L' = -3x - 3 \qquad L' = 0 \Rightarrow -3x - 3 = 0 \Rightarrow 3x = -3$

$x = -1$

3) "koordinatERNA" ⇒ Beräkna y-värdet: $y = f(-1) = 0{,}5 - 1{,}5 - 5 + 8 = 2$

f växer snabbast i $(-1, 2)$

10. Nedan visas en teckentabell över en funktion, f, som kan skrivas som $f(x) = ax^3 + bx^2 - 7{,}2x + c$

x		-3		2	
f	↗	16	↘	-9	↗
f '	+	0	-	0	+

Ange rätt värden på konstanterna a, b och c (0/1/3)

Ur tabellen fås att $x = -3$ och $x = 2$ är vändpunkter

⇒ Derivatan kan skrivas: $f'(x) = k \cdot (x+3)(x-2) =$

$= k \cdot (x^2 - 2x + 3x - 6) =$

$= kx^2 + kx - 6k$

Ur uppgiften fås att samma derivata kan skrivas: $f'(x) = 3ax^2 + 2bx - 7{,}2$

Jämförs dessa uttryck fås: $6k = 7{,}2 \Rightarrow k = 1{,}2$

$3a = k \Rightarrow a = \frac{1{,}2}{3} = 0{,}4$

$2b = k \Rightarrow b = \frac{1{,}2}{2} = 0{,}6$

Tabellen ger också att $f(2) = -9$ $\Rightarrow$ $a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 - 7{,}2 \cdot 2 + c = -9$ $\left[\begin{matrix} a = 0{,}4 \\ b = 0{,}6 \end{matrix}\right]$

$0{,}4 \cdot 8 + 0{,}6 \cdot 4 - 14{,}4 + c = -9$

$3{,}2 + 2{,}4 - 14{,}4 + c = -9 \Rightarrow c = -0{,}2$

11. För tredjegradsfunktionen f gäller följande:

f har en positiv terrasspunkt vid $x = 1$

f har en tangent vid $x = 2$ som har ekvationen $y = 3x - 6$

Ange största och minsta värdet för f i intervallet $0 \leq x \leq 3$ (0/0/3)

Terasspunkt vid $x = 1 \Rightarrow$ Derivatan har en dubbelrot vid $x = 1$

$$\Rightarrow f'(x) = a\cdot(x-1)^2 = a\cdot(x^2 - 2x + 1)$$

Tangenten $y = 3x - 6$ vid $x = 2$ $\Rightarrow f'(2) = 3$

Detta gör att a kan bestämmas: $a\cdot(2-1)^2 = 3$

$a = 3$

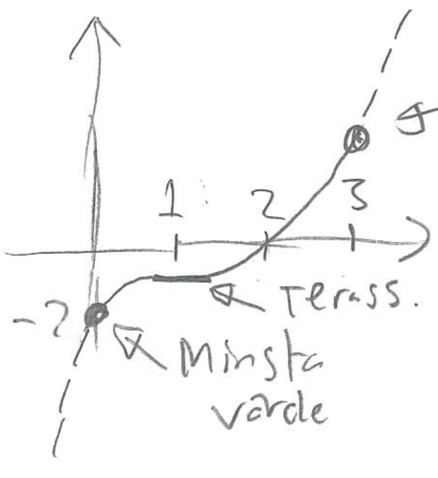
$$\Rightarrow f'(x) = 3(x^2 - 2x + 1) = 3x^2 - 6x + 3$$

"Baklängesderivering" ger: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + c$

För att hitta värdet på konstanten c utnyttja att tangenten $y = 3x - 6$ då $x = 2$ $\Rightarrow f(2) =$ "Tangentens y då $x=2$" $= 0$

$$f(2) = 0 \Rightarrow 2^3 - 3\cdot 2^2 + 3\cdot 2 + c = 0 \Rightarrow$$

$$8 - 12 + 6 + c = 0 \Rightarrow c = -2$$



Största värdet $= f(3)$

$$f(3) = 3^3 - 3\cdot 3^2 + 3\cdot 3 - 2 =$$

$$= 27 - 27 + 3\cdot 3 - 2 =$$

$$= 7$$

Minsta värde: -2 Största värde: 7