FACIT

Andraderivata

Del 1 – Utan digitalt hjälpmedel

1. Bestäm $f''(x)$ till funktionerna

Derivera två gånger.

a) $f(x) = 2x^3 + 6x - 8$ (1/0/0)

$f'(x) = 6x^2 + 6$

$f''(x) = 12x$

b) $f(x) = 6e^{2x}$ (1/0/0)

$f'(x) = 6 \cdot e^{2x} \cdot 2 = 12e^{2x}$

$f''(x) = 12e^{2x} \cdot 2 = 24e^{2x}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{e^{-x/2}}{2}$ (1/1/0)

$f'(x) = \dfrac{2x}{4} - \dfrac{e^{-\frac{x}{2}}}{2} \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{e^{-\frac{x}{2}}}{4}$

$f''(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{e^{-x/2}}{4} \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{e^{-\frac{x}{2}}}{8}$

2. För funktionen f gäller att extrempunkternas x-värden är $x = 0$ och $x = 3$ och andraderivatan ges av $f''(x) = 6x - 9$
Avgör karaktären på de båda extrempunkterna. (2/0/0)

Bestäm f'' för de båda x-värdena:

$f''(0) = 6 \cdot 0 - 9 = -9 \Rightarrow$ negativt $\Rightarrow$ ∩ $\Rightarrow$ max

$f''(3) = 6 \cdot 3 - 9 = 18 - 9 = 9 \Rightarrow$ positivt $\Rightarrow$ ∪ $\Rightarrow$ min

$x = 0$ är ett max
$x = 3$ är ett min

$\Rightarrow$ Max: $(3, 25)$ Min: $(-1, -7)$

3. Bestäm extrempunkterna till funktionen $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x - 2$ och avgör deras karaktär med hjälp av andraderivatan. (3/1/0)

1.) Ta fram extrempunkternas x-koord via "$f' = 0$"

$f'(x) = -3x^2 + 6x + 9 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$ "pq"

$\pm 1 \quad \sqrt{1 \cdot 1 + 3} = \sqrt{4} = \boxed{2}$

$x_1 = 1 + 2 = 3 \quad x_2 = 1 - 2 = -1$

2) "Andraderivatatestet" för de båda x-värdena

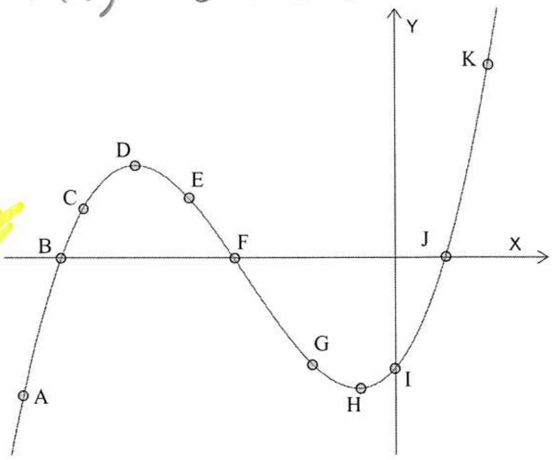
$f''(x) = -6x + 6 \quad x = 3 \Rightarrow f''(3) = -12 \Rightarrow$ Neg $\Rightarrow$ Max

$x = -1 \Rightarrow f''(-1) = 12 \Rightarrow$ pos. $\Rightarrow$ Min

3) Beräkna y-värdena $x = -1 \Rightarrow f(-1) = -(-1)^3 + 3(-1)^2 + 9 \cdot (-1) - 2 = -7$

$x = 3 \Rightarrow f(3) = -3^3 + 3 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 - 2 = 25$

4. Figuren visar grafen till tredjegradsfunktionen f.
I grafen har punkterna A - K markerats.
I vilken/vilka av punkterna uppfylls villkoren…



a) $f < 0$ (1/0/0)

"Negativa y-värden": A, G, H, I

b) $f' < 0$ (1/0/0)

"Neg. lutning": E, F, G

c) $f' = 0$ och $f'' < 0$ **samtidigt** (0/1/0)

vändpunkt $\Rightarrow$ Maxpunkten: D

d) $f'' > 0$ (0/1/0)

Alla punkter där grafen "böjer av" uppåt

$\Rightarrow$ G, H, I, J, K

OBS! Även G trots att f' där är negativ

5. Bestäm $f''(x)$ till funktionerna

Derivera två gånger

a) $f(x) = \frac{2}{x} = 2 \cdot x^{-1}$ (0/2/0)

$f'(x) = -2 \cdot x^{-2}$

$f''(x) = 4 \cdot x^{-3} = \frac{4}{x^3}$

b) $f(x) = \sqrt{x} + 2^x = x^{0,5} + 2^x$ (0/2/0)

$f'(x) = 0,5 \cdot x^{-0,5} + 2^x \cdot \ln 2$

$f''(x) = -0,25 \cdot x^{-1,5} + 2^x \cdot \ln 2 \cdot \ln 2$

$= \frac{1}{4x^{1,5}} + 2^x \cdot (\ln 2)^2$

6. Skissa i det tomma koordinatsystemet grafen till en valfri funktion, f, som uppfyller de fyra villkoren nedan: (1/2/0)

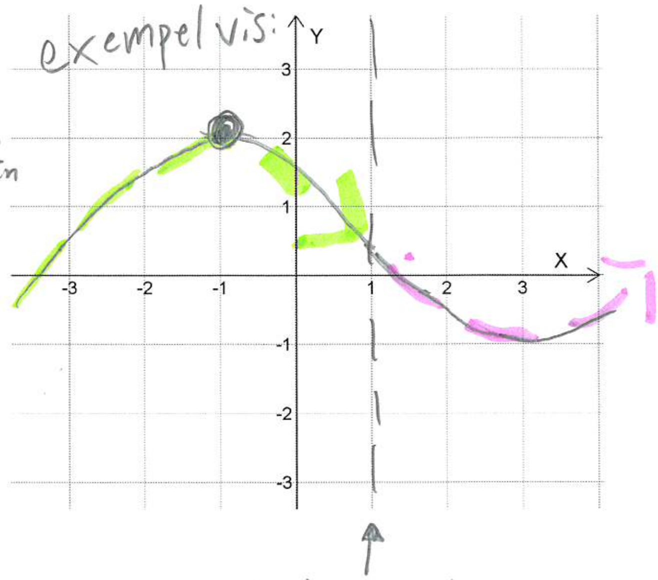
$f(-1) = 2$ → Punkten $(-1,2)$ på grafen

$f'(-1) = 0$ → Vänder vid $x=-1$

$f''(x) < 0$ i intervallet $x < 1$

$f''(x) > 0$ i intervallet $x > 1$

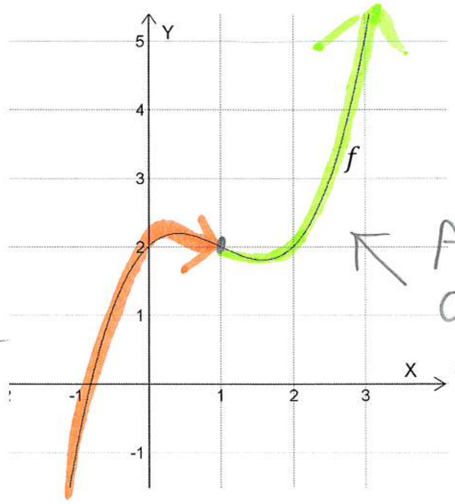
exempelvis:



Andraderivatan byter tecken

⇒ Grafen byter "böjning"

7. Figuren till höger visar grafen till tredjegradsfunktionen f. Avgör om påståendena nedan är sanna eller falska. *Motivera ditt svar!* (0/3/0)



A: $f''(0) > f'(0)$ FALSKT

Vid $x=0$ är $f''(x)$ neg. och $f'(x)$ pos. Neg. > Pos.

B: $f(0) < f''(0)$ FALSKT

Vid $x=0$ är $y=+2$ och $f''(x)$ neg. $+2 <$ Neg

C: $f''(1) = 0$

Vid $x=1$ byter grafen "böjningstrend" $\Rightarrow$ $f''(x)=0$ SANT

8. För funktionen f gäller att $f''(x) = 3x^2 - 6x$ och funktionen har en extrempunkt i (-1, 6).

a) Avgör extrempunktens karaktär. (1/0/0)

Stoppa in x-värdet i $f''(x)$:

$f''(-1) = 3\cdot(-1)^2 - 6\cdot(-1) = 3+6 = 9 \Rightarrow$ Pos. $\Rightarrow$ min

(-1,6) är en min.punkt

b) Bestäm uttrycket för $f(x)$ (0/1/2)

$f'(x)$ fås via "baklängesderivering" $\Rightarrow$ $f'(x) = x^3 - 3x^2 + C$ där C är en konstant.

Minpunkt vid $(-1,6)$ $\Rightarrow$ $f'(-1) = 0$ $\Rightarrow$ C kan bestämmas

$(-1)^3 - 3\cdot(-1)^2 + C = 0$

$-1 - 3 + C = 0$

$C = 4$

$f'(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

$f(x)$ fås nu via "baklängesderivering" igen:

$f(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 + 4x + D$ där D är en konstant.

$f(-1) = 6 \Rightarrow$ D kan bestämmas

$\frac{(-1)^4}{4} - (-1)^3 + 4\cdot(-1) + D = 6$

$\frac{1}{4} + 1 - 4 + D = 6 \Rightarrow \frac{-11}{4} + D = \frac{24}{4}$

$D = \frac{35}{4} \Rightarrow f(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 + 4x + \frac{35}{4}$

9. Uppgiften nedan är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften.

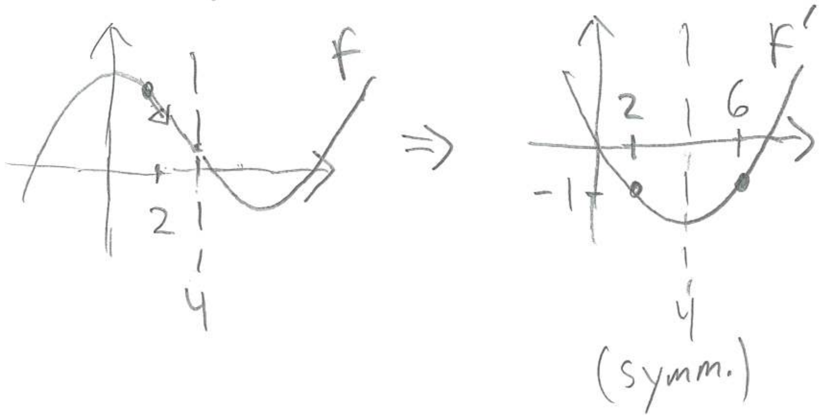
För tredjegradsfunktionen f gäller att

- $f'(2) = -1$
- $f''(4) = 0$

Bestäm $f'(6)$

(0/0/2)

Uppgiften går att lösa på många sätt, Lättast är att utnyttja att derivatan är en andragradsfunk. och därmed symmetrisk.



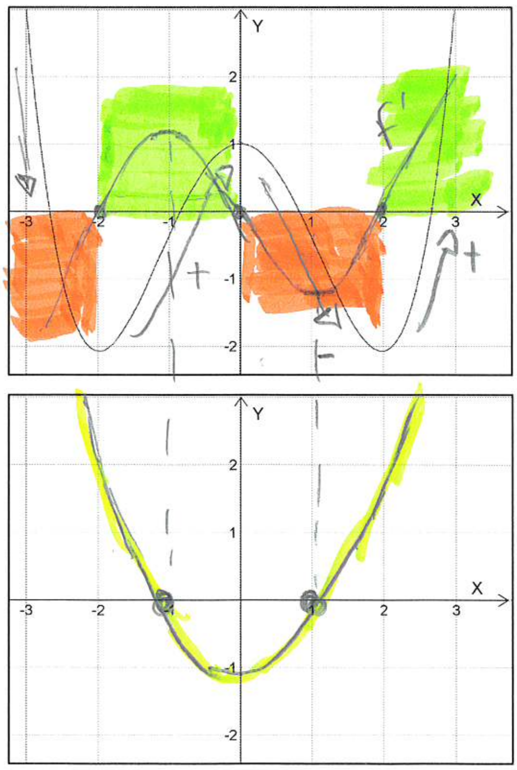
$\Rightarrow f'(6)$ är lika stor som $f'(2)$

$\Rightarrow f'(6) = -1$

10. Figuren nedan visar grafen till funktionen f.

Skissa i koordinatsystemet nedan grafen till f''

(0/0/2)



f

(Typ)

f''

Rita först grafen till f' genom tänket "På väg nedåt ⇒ neg. y-värden" och vice versa.

Gör sedan samma sak igen fast utgående från f'

$f \rightarrow f' \rightarrow f''$

Fjärdegrad — Tredjegrad — Andragrad

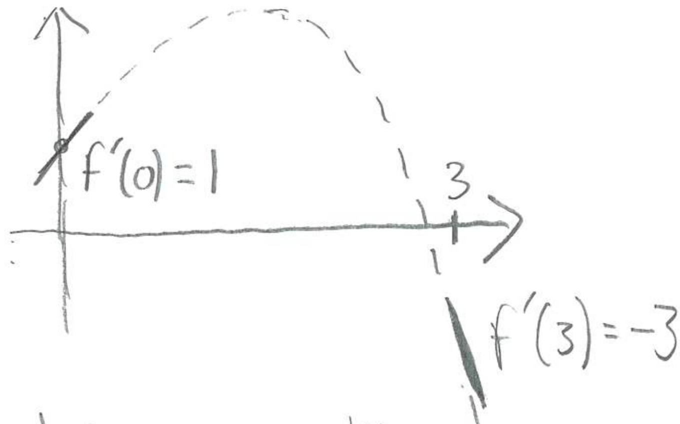
11. Uppgiften nedan är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften.

Om polynomfunktionen f vet man följande:

- $f'(0) = 1$
- $f'(3) = -3$
- $f''(x) < 0$ för $x > 0$

Vilka slutsatser kan dras beträffande extrempunkter till f i intervallet $x > 0$? (0/1/2)

Skiss av den givna informationen:



$f''(x)<0$ för $x>0$ $\Rightarrow$ Grafen böjer av nedåt för alla pos. x-värden

f måste ha ett maxvärde i intervallet $0<x<3$ eftersom derivatan måste passera noll då den går från +1 till −3.

Inga fler extrempunkter kan finnas då $x>0$ eftersom $f''(x)<0$ för alla sådana x dvs. grafen kommer maxvärdet att "accelerera" nedåt hela tiden.