Max- och min problem

Del 1 – Utan digitalt hjälpmedel

1. Vid en inspark i fotboll sparkas bollen snett uppåt.
Bollens höjd över marken h meter efter tiden t sekunder
kan beskrivas enligt den förenklade modellen

$$h(t) = 10t - 5t^2$$

Bestäm bollens högsta höjd. (2/0/0)

2. Nedanstående uppgift är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften.

På ett sjukhus vill man undersöka om nyfödda barn följer en normal vikt-utveckling. Man har därför samlat in uppgifter om hur barnens vikt varierar de första dygnen. Dessa data har sedan använts för att ställa upp sambandet:

$$V(t) = 5t^3 - 135t + 3500$$

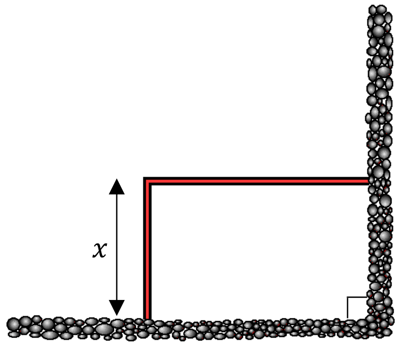
där V är medelvikten i gram och t är tiden i dygn efter födseln. Sambandet gäller under de sex första dygnen efter födseln.

Hur många dygn efter födseln är medelvikten lägst? (2/0/0)

3. En bonde ska bygga en rektangulär hage mot två stenmurar. Stenmurarna är vinkelräta mot varandra, och det finns tillgång till totalt 60 meter stängsel.

Se figuren till höger.

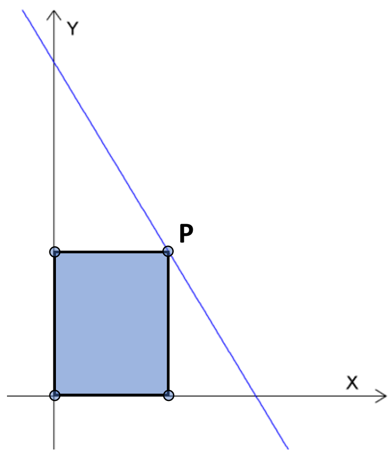
Visa med hjälp av derivata att $x = 30$ m ger största möjliga area. (3/0/0)



4. Figuren till höger visar en rektangel som är inritad i ett koordinatsystem.

För rektangeln gäller att den har ett hörn i origo, två hörn är på koordinataxlarna samt att ett hörn är på grafen till funktionen $f(x) = 8{,}8 - 2{,}2x$.

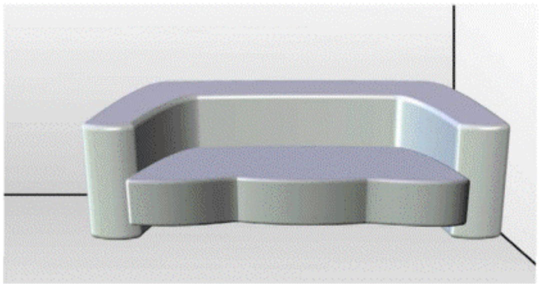
a) Bestäm rektangelns största möjliga area. (3/0/0)



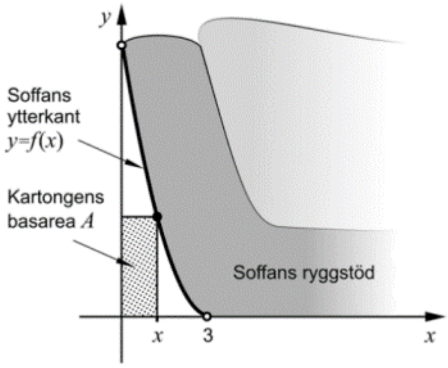
b) Bestäm x-värdet hos **P** för vilken rektangeln är kvadratisk. (0/1/0)

5. Nedanstående uppgift är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften.

Vid transport av varor används ofta containrar. För att utnyttja utrymmet i containern maximalt packas varorna så tätt som möjligt. Soffan ”Torulf” ska fraktas i en container där den placeras i ett hörn av containern, se figur 1.



Figur 1. Soffan stående i containern



Figur 2. Soffan sedd uppifrån.

I utrymmet som uppstår mellan hörnet och soffan kan en kartong placeras. Kartongen har formen av ett rätblock. För att ta reda på vilka mått kartongen kan ha räcker det med att undersöka dess basarea, se figur 2.

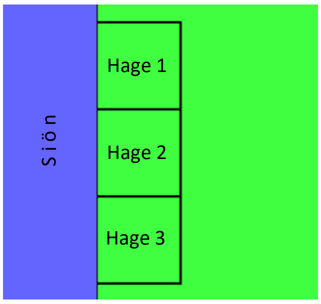
Basarean A dm^2 kan beskrivas med $A(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ där x dm är kartongens bredd, se figur 2.

a) För vilket värde på x blir basarean hos kartongen maximal? (3/0)

I figur 2 är soffans ytterkant mot containerns hörn markerat med den kraftigare svarta linjen. Soffans ytterkant beskrivs av funktionen f där $y = f(x)$

b) Bestäm det funktionsuttryck $y = f(x)$ som beskriver soffans ytterkant. (0/1)

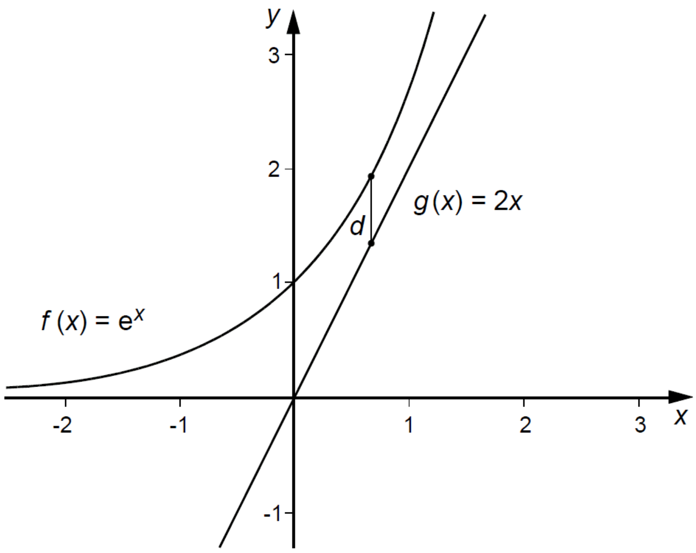
6. Ytterligare en hagsugen bonde är i farten.
Denna gång ska tre likadana hagar byggas.
Hagarna ska byggas mot en märkligt rak sjöstrand, och tillgängligt är 360 meter stängsel.



Bestäm måtten på hagarna så gör att den totala arean blir så stor som möjligt. (1/2/0)

7. Nedanstående uppgift är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften.

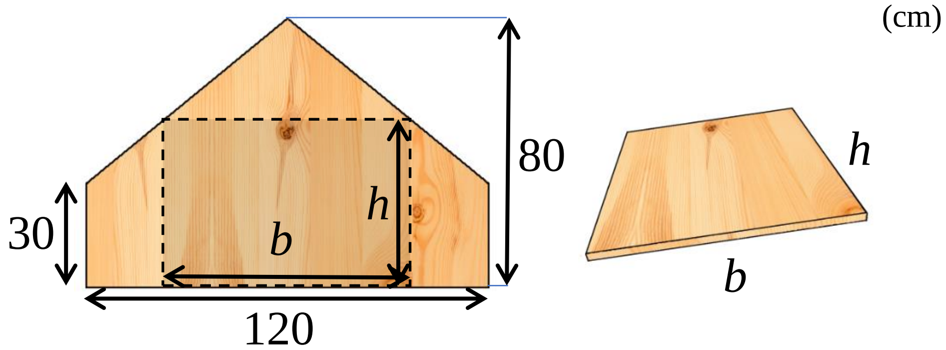
Beräkna det kortaste vertikala avståndet d mellan kurvan $f(x) = e^x$ och linjen $g(x) = 2x$ (se figur). Svara exakt. (0/3/0)



8. Funktionen $h(x) = -0{,}01x^3 + 0{,}45x^2 + 18$ beskriver höjden i centimeter av en solrosplanta, x dagar efter att den planterats om utomhus.

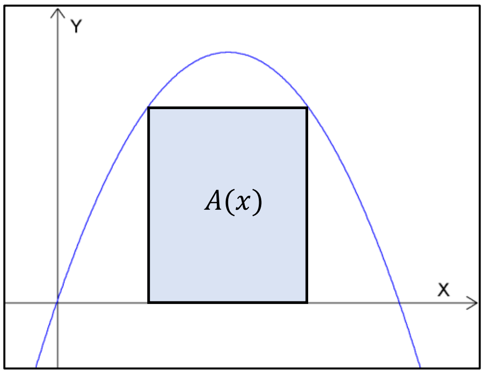
När växte solrosen som snabbast? (0/1/1)

9. Mattias vill bygga en lådbil åt sina barn. Bottenplattan ska vara i form av en rektangel, och ska sågas ut ur en bräda med formen enligt nedanstående figur.



Bestäm måtten, *b* och *h*, hos den största möjliga rektangeln som går att såga ut. (0/1/3)

10. I grafen till funktionen $f(x) = -2x^2 + 4x$ har en rektangel lagts in så att två av rektangelns hörn ligger på grafen till f och två av hörnen ligger på x-axeln.



Bestäm måtten på den största möjliga rektangeln.

Svara exakt! (0/1/3)

11. En burk med läsk innehåller $330\ cm^3$ och är byggd som en rak cylinder.
Bestäm radien så att materialåtgången blir så liten som möjligt.
Svara exakt! (0/1/3)

Del 2 – Med digitalt hjälpmedel

D1. Nedanstående uppgift är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften.

I de afrikanska skogarna söder om Sahara lever dvärggalagon. Det är en liten halvapa som är duktig på att hoppa högt utan ansats.

Ett av de högsta observerade hopp en dvärggalago gjort kan beskrivas med modellen $h(x) = 33x - 0{,}11x^3$

I modellen är $h(x)$ avståndet i centimeter mellan dvärggalagon och marken under hoppet och x är avståndet i centimeter längs marken från avstampet.

Hur högt var detta hopp? (2/0/0)

D2. Nedanstående uppgift är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften.

En idrottsforskare undersökte förhållandet mellan syreupptagningen S liter/minut och steglängden l centimeter för ett antal löpare som sprang med en viss hastighet.
Forskaren fann följande samband:

$$S = 0{,}0009775 \cdot l^2 - 0{,}287385 \cdot l + 25{,}0653$$

där $133 \le l \le 170$

Visa att syreupptagningen är som lägst vid steglängden 147 cm. (2/0/0)

D3. Ett mycket optimistiskt UF-företag säljer T-shirts med decimaler på talet e.

De funderar på hur många T-shirts de ska trycka upp för att maximera sin vinst.

De räknar och ställer till slut upp följande modell för hur vinsten beror av antalet upptrycka T-shirts.

$V(x) = -0{,}001x^3 + 0{,}1x^2 + 60x - 4000$

där V är vinsten i kronor efter x är sålda T-shirts.

Hur många T-shirts ska företaget sälja för att…

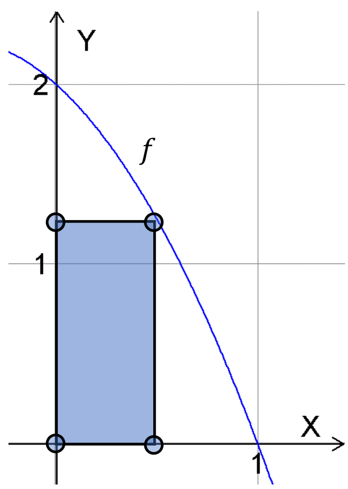
a) …få största möjliga vinst? (2/0/0)

b) …gå med vinst överhuvudtaget? (1/1/0)

D4. I koordinatsystemet till höger har en rektangel ritats.

För rektangeln gäller att den har ett hörn i origo, två hörn på de positiva koordinataxlarna och ett hörn på grafen till funktionen $f(x) = -x^2 - x + 2$.

Bestäm den största möjliga area som rektangeln kan ha. (2/1/0)
Svara med 2 decimaler!



D5. En sjukdom sprider sig under några veckor i en mindre stad.
Sjukdomens spridning kan beskrivas med den matematiska modellen

$$y = 100 \cdot x^2 \cdot 0{,}9^x + 1$$

där y är antalet personer x dygn efter att första personen insjuknat.

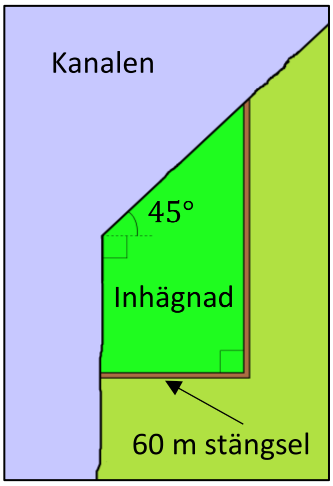
a) Bestäm ett värde på $y'(10)$ och tolka resultatet. (2/0/0)

b) Hur många personer var som mest sjuka samtidigt?
Endast svar krävs! (0/1/0)

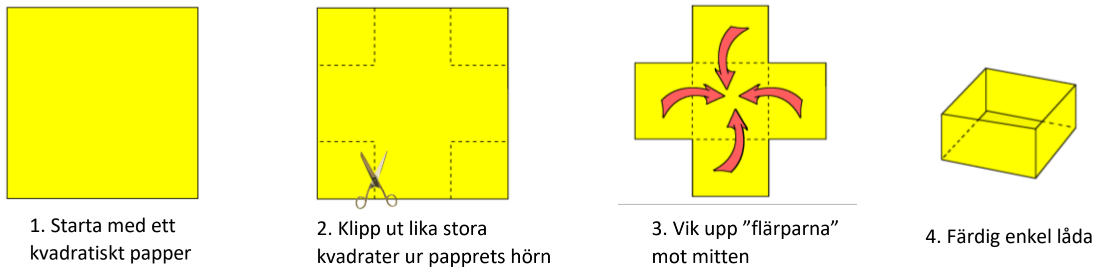
c) Efter hur många dygn **ökar** antalet sjuka som mest? (0/0/1)
Endast svar krävs!

D6. Vid en kanal finns en kaj, som förenklat kan ses ha en 45 gradig vinkel (se figur).
Vid kajen sker uthyrning av kanoter. Dessa kanoter ska skyddas från obehöriga genom att hägnas in med ett 60 meter stängsel ifrån de två landsidorna.

Vilka mått får inhägnadens fyra sidor då dess area är så stor som möjligt? (1/3/0)



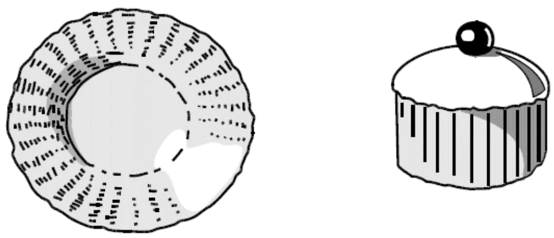
D7. En låda ska byggas av ett kvadratiskt papper på följande sätt:



Bestäm med hjälp av derivata den största möjliga volymen som en låda gjord på detta sätt kan få om det kvadratiska pappret har sidan 30 cm. (0/3/0)

D8. Nedanstående uppgift är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften.

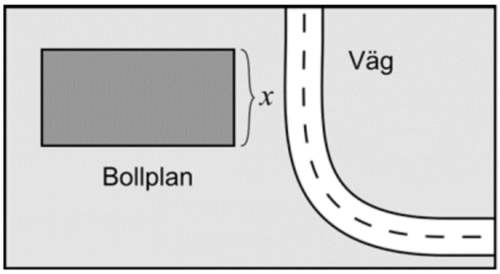
Ett cirkulärt papper med radien 6,4 cm viks upp så att man får en cylindrisk pappersform för bakverk (se figur).

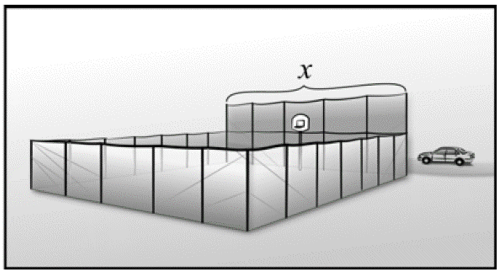


Beräkna med hjälp av derivata hur papperet ska vikas för att pappersformen ska få så stor volym som möjligt. (0/2/1)

D9. Nedanstående uppgift är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften.

Garfesta kommun ska bygga en bollplan. Den ska vara rektangulär med stängsel runtomkring. För att inte bollarna ska hamna ute på vägen bestämmer man sig för att bygga ett högre stängsel på den sida som ligger närmast vägen, se figur.





Kommunen har bestämt att stängslet maximalt får kosta 6600 kr. Det lägre stängslet kostar 75 kr/m och det högre 225 kr/m. Kostnaden för stolpar och grindar ingår i priset för stängslet.

Om kommunen använder 6600 kr till stängslet kan bollplanens area A m^2 beräknas enligt nedanstående samband:

$A(x) = 44x - 2x^2$ där x m är längden på bollplanens sida närmast vägen.

a) Bestäm med hjälp av derivata det värde på x som ger bollplanens maximala area. (2/0/0)

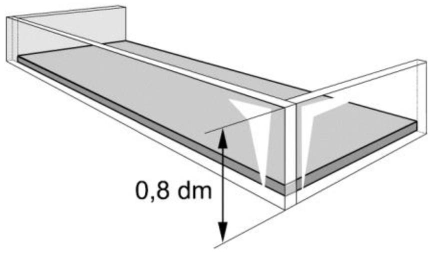
b) Visa att bollplanens area A m^2 kan skrivas $A(x) = 44x - 2x^2$ (0/1/1)

D10. Nedanstående uppgift är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften.

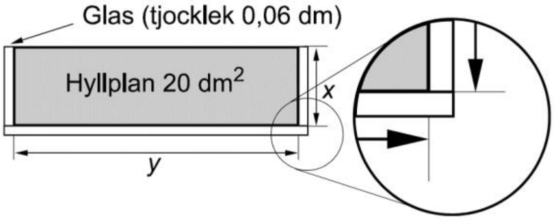
Per och Stina har fått en beställning på hyllor från en butikskedja. Kravet är att de rektangulära hyllplanen ska ha en area av 20 dm^2 och vara försedda med tre kanter av glas. Glaset ska ha tjockleken 0,06 dm och höjden 0,8 dm. Den längre glasskivan ska täcka kanterna på de två kortare glasskivorna. Se figurerna nedan.

Per och Stina vill använda så lite glas som möjligt till de tre glaskanterna eftersom glaset är dyrt.

Bestäm bredden x och längden y hos hyllplanen så att arean för glaset minimeras. (0/1/2)



Figur 1. Hylla sedd från sidan



Figur 2. Hylla sedd uppifrån

D11. Nedanstående uppgift är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften.

Tartaglia (1500-1557)

Italienaren Tartaglia var en matematiker som levde på 1500-talet. Han anses ha formulerat följande matematiska problem, här återgivet i modern översättning:

Summan av två positiva tal är 8. Bestäm talen så att produkten av talens differens och talens produkt blir så stor som möjligt.

Din uppgift är att lösa Tartaglias matematiska problem. (0/0/3)