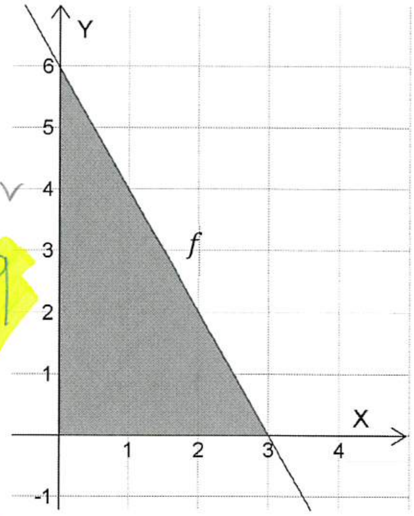
FACIT

Integraler

Del 1 – Utan digitalt hjälpmedel

1. Figuren till höger visar grafen till en funktion, f, med en inritad integral.



a) Bestäm integralens värde. (1/0/0)

Integralen motsvarar arean av en triangel $\Rightarrow \frac{b \cdot h}{2} = \frac{3 \cdot 6}{2} = 9$

b) Teckna integralen som beskriver området. (2/0/0)

Funktionen $f = 6 - 2x$

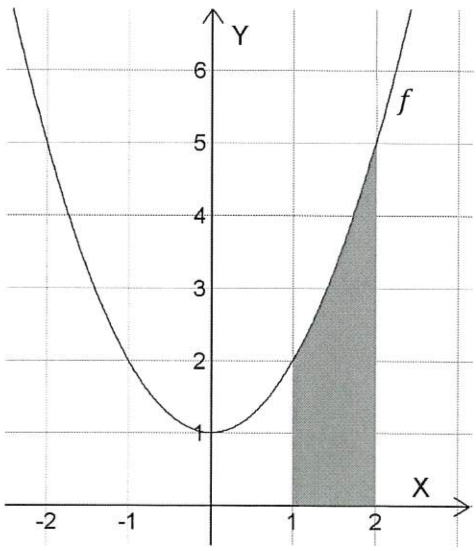
x-värdena 0 t.om 3 $\Rightarrow \int_0^3 (6-2x)\,dx$

c) Bestäm integralens värde med hjälp av primitiv funktion. (2/0/0)

$$\int_0^3 (6-2x)\,dx = \left[F = 6x - 2\frac{x^2}{2}\right]_0^3 = F(3) - F(0)$$

$$= (6 \cdot 3 - 9) - 0 = 18 - 9 = 9$$

2. Figuren till höger visar grafen till funktionen $f(x) = x^2 + 1$ med en inritad integral.



Bestäm integralens värde. (3/0/0)

Svara exakt!

x-värdena 1 t.om 2 $\Rightarrow \int_1^2 (x^2+1)\,dx =$

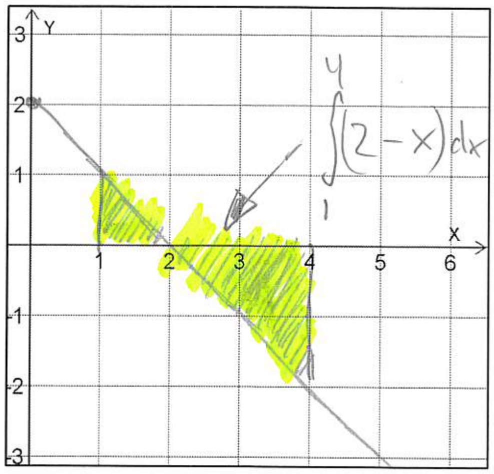
$$= \left[F = \frac{x^3}{3} + x\right]_1^2 = F(2) - F(1)$$

$$= \left[\begin{array}{l} F(2) = \frac{8}{3} + 2 = \frac{14}{3} \\ F(1) = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3} \end{array}\right] = \frac{14}{3} - \frac{4}{3} = \frac{10}{3}$$

3. a) Rita i det tomma koordinatsystemet till höger ut det område som kan beskrivas av integralen

$$\int_1^4 (2 - x)\,dx$$

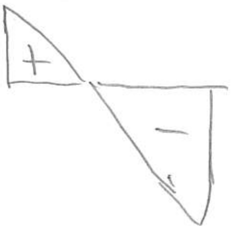
(1/0/0)



b) Bestäm värdet av integralen i a) (2/0/0)

2 sätt:

→ "Pusselbitar"



$= \begin{matrix} +0{,}5 \\ -2 \end{matrix} = -1{,}5$

→ Primitiv funktion

$\left[F = 2x - \frac{x^2}{2}\right]_1^4 = F(4) - F(1) = \begin{bmatrix} F(4) = 8 - \frac{16}{2} = 0 \\ F(1) = 2 - \frac{1}{2} = 1{,}5 \end{bmatrix} = 0 - 1{,}5 = -1{,}5$

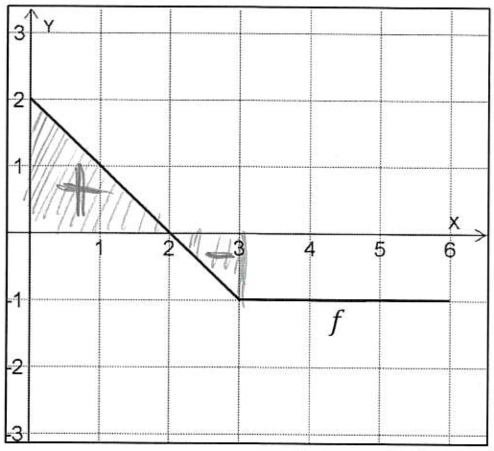
4. Bestäm värdet av integralen $\int_0^3 \frac{x^2}{3}\,dx$ (2/0/0)

$\int_0^3 \frac{x^2}{3}\,dx = \left[F = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3}\right]_0^3 = F(3) - F(0) = \begin{bmatrix} F(3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3^3}{3} = 3 \\ F(0) = 0 \end{bmatrix}$

$= 3$

5. Figuren till höger visar grafen till en funktion, f, som är definerad i intervallet $0 \leq x \leq 6$

Använd grafen för att svara på frågorna nedan.



a) Bestäm värdet av $\int_0^3 f(x)\,dx$ (0/1/0)

"Pusselbits-tänk" $\Rightarrow +2 - 0{,}5 = 1{,}5$

b) Vilket positivt värde på a löser ekvationen nedan? (0/1/0)

$$\int_0^a f(x)\,dx = 0$$

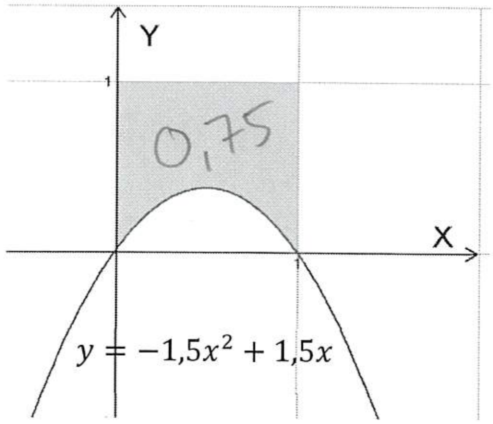
Om integralen ska bli noll ska de negativa bidragen bli lika stora som de positiva.

$\Rightarrow a = 4{,}5$

6. Figuren till höger visar grafen till funktionen $y = -1{,}5x^2 + 1{,}5x$ och ett markerat område

Bestäm arean av det markerade området. (1/2/0)

Svara exakt!



Området ges av □ − ⌓

$$□ = 1 \cdot 1 = 1$$

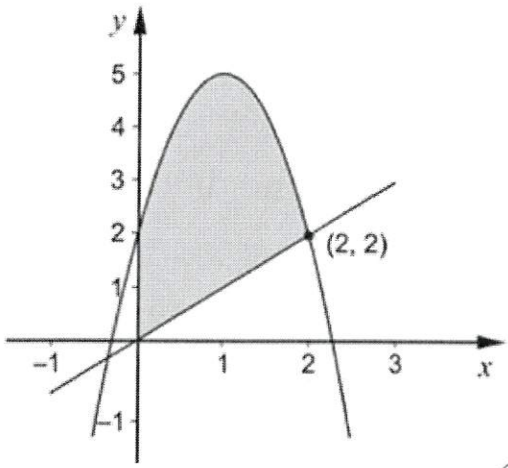
$$⌓ = \int_0^1 (-1{,}5x^2 + 1{,}5x)\,dx = \left[F = -\frac{1{,}5x^3}{3} + \frac{1{,}5x^2}{2}\right]_0^1 = F(1) - F(0)$$

$$= \left[\begin{array}{l} F(1) = -\frac{1{,}5}{3} + \frac{1{,}5}{2} = -0{,}5 + 0{,}75 = 0{,}25 \\ F(0) = 0 \end{array}\right] = 0{,}25 \Rightarrow$$

Områdets area $1 - 0{,}25 = 0{,}75$

7. Uppgiften nedan är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften. (0/2/0)

Figuren visar ett område som begränsas av y-axeln, kurvan $y = 6x - 3x^2 + 2$ och linjen $y = x$. Beräkna områdets area.



Området ges av ⌓ − ◺

$$⌓ = \int_0^2 (6x - 3x^2 + 2)\,dx = \left[F = 6\cdot\frac{x^2}{2} - 3\cdot\frac{x^3}{3} + 2x\right]_0^2 = F(2) - F(0)$$

$$= \left[\begin{array}{l} F(2) = 12 - 8 + 4 = 8 \\ F(0) = 0 \end{array}\right] = 8 - 0 = 8$$

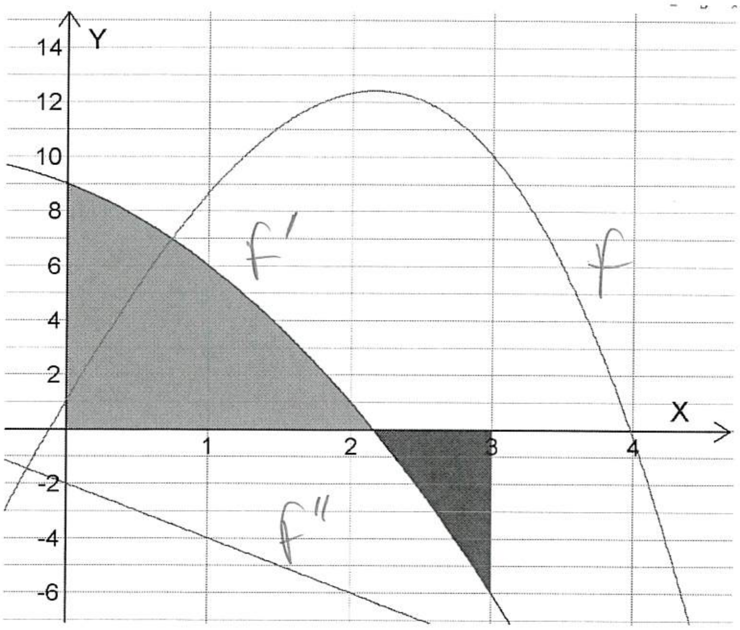
$$◺ = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2 \Rightarrow$$

Områdets area:
$8 - 2 = 6$

8. Figuren visar tre funktioner som är varandras derivatafunktioner.

Funktionerna är $f''(x)$, $f'(x)$ och $f(x)$

I bilden finns även en integral.



De tre funktionerna måste vara

f = Tredjegrad

f' = Andragrad

f'' = Rät linje

Integralen är på f'

Bestäm värdet av den markerade integralen (0/0/2)

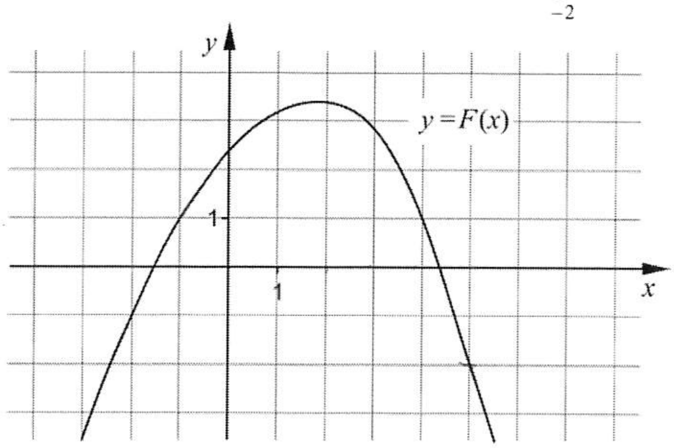
$$\text{Integralen} = \int_0^3 f'\,dx = \left[\begin{matrix}\text{Primitiv till} \\ f' \text{ är } f\end{matrix}\right]_0^3 = f(3) - f(0) =$$

$$= \left[\begin{matrix} f(3) = 10 \text{ enl. grafen} \\ f(0) = 1 \text{ enl. grafen}\end{matrix}\right] = 10 - 1 = 9$$

9. Uppgiften nedan är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften. (0/0/1)

F är en primitiv funktion till funktionen f.

I figuren visas grafen till funktionen F. Bestäm $\int_{-2}^{5} f(x)\,dx$



$$\int_{-2}^{5} f(x)\,dx = \left[\begin{matrix}\text{Primitiv till} \\ f \text{ är } F\end{matrix}\right]_{-2}^{5}$$

$$= F(5) - F(-2) =$$

$$= \left[\begin{matrix} F(5) = -2 \text{ enl. grafen} \\ F(-2) = -1 \text{ enl. grafen}\end{matrix}\right] =$$

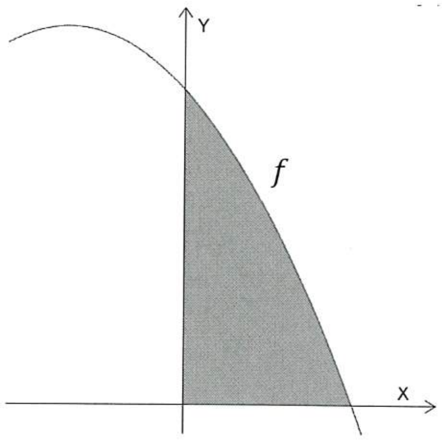
$$= -2 - (-1) = -1$$

Del 2 – Med digitala hjälpmedel

D1. Figuren visar grafen till funktionen

$f(x) = -2{,}4x^2 - 4{,}2x + 16$

och ett markerat område.



Bestäm områdets area (2/0/0)

Svara med 2 decimaler!

Börja med att bestämma skärningen med x-axeln

Skärning ger $x \approx 1{,}85$

Områdets area $= \int_0^{1{,}85} f \, dx = \begin{bmatrix} \text{Integral}(f) \\ \text{el.} \\ \text{fnInt}(\;) \end{bmatrix}$

$\approx 17{,}35$

D2. Nedanstående uppgift är ifrån ett gammalt kursprov. Lös uppgiften. (2/0/0)

En djurpopulation ökar med hastigheten $v(t) = 200 + 50t$ (djur/år) där t är tiden i år. Med hur många djur ökar populationen under de 10 första åren?

Funktionen : djur/år

Integralen : djur/år · år = djur

$\Rightarrow$ Antal djur ges av integralen

"Första 10 åren" $\Rightarrow \int_0^{10} (200 + 50t) \, dt = \begin{bmatrix} \text{Integral}(f) \\ \text{el.} \\ \text{fnInt} \end{bmatrix}$

$= 4500$ st

D3. Hastigheten hos en bil x sekunder efter starten ges av funktionen
$v(x) = 60 \cdot (1 - 0{,}85^x)$

där v är hastigheten i m/s efter x sekunder.

a) Bestäm hastigheten efter 3 sekunder. (1/0/0)

Funktionen: m/s

Integralen: m/s · s = m

⇒ Hastigheten ges av v(3) = 23,15 ≈ 23,2 m/s

b) Bestäm hur långt bilen har åkt efter 3 sekunder. (2/0/0)

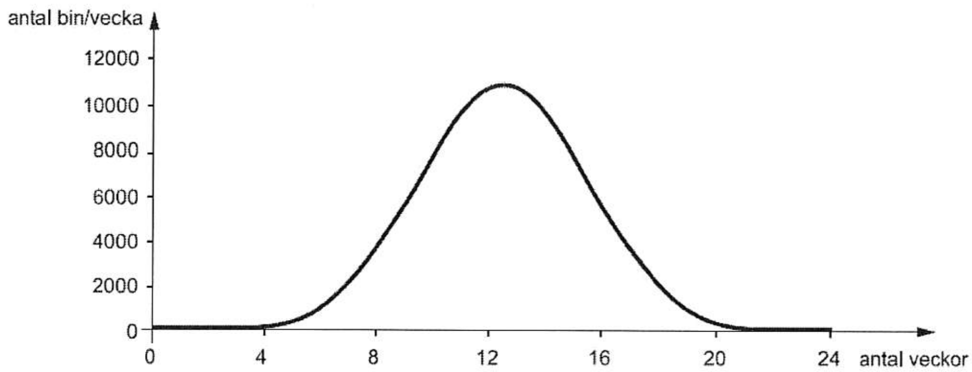
Sträckan ges av integralen ⇒ $\int_0^3 60 \cdot (1 - 0{,}85^x)\,dx = \begin{bmatrix} \text{Integral(f)} \\ \text{el.} \\ \text{fn Int} \end{bmatrix}$

= 37,5 m

D4. Nedanstående uppgift är ifrån ett gammalt kursprov. Lös uppgiften. (0/2/0)

Den hastighet som antalet bin i ett bisamhälle ökar med per vecka framgår av figuren. Arean under grafen kan beräknas med en integral.

Tolka innebörden av integralens värde.



Funktionen: Antal bin/vecka

Integralen: Antal bin/vecka · Antal veckor = Antal bin

Integralen beskriver ökningen av antalet bin

417

D5. En bonde har en vattentank med ~~1000~~ liter vatten.
Genom en läcka börjar det rinna ut vatten, y liter/minut,
där $y = 100e^{-0.24x}$ och x är antalet minuter sedan läckan uppstått.

a) Hur många liter vatten finns kvar i tanken efter de första 10 minuterna? (1/2/0)

Funktionen : liter/minut
Integralen : liter/minut · minuter = liter $\Rightarrow$ Integralen ger antal liter som runnit ut.

Vatten kvar = 417 − det som runnit ut

Det som runnit ut på 10 min $= \int_0^{10} 100e^{-0,24x}\,dx = \left[\begin{array}{c}\text{Integral( )}\\ \text{el.}\\ \text{fn Int}\end{array}\right] = 378,9\,l$

Vatten kvar = 417 − 378,9 = 38,2 liter

b) Tolka betydelsen av beräkningen nedan (0/1/1)

$$\int_0^3 y\,dx > \int_3^\infty y\,dx$$

Hur mycket som rinner ut de första 3 minuterna

Hur mycket som rinner ut efter de första 3 minuterna

$\boxed{\text{Det rinner ut mer vatten de första 3 minuterna än vad det gör därefter dvs mer än hälften av vattnet rinner ut de första 3 minuterna}}$

D6. Nedanstående uppgift är ifrån ett gammalt kursprov. Lös uppgiften. (0/1/3)

När Mario föds bestämmer sig hans mormor för att spara pengar åt honom i en burk. Mormor tänker lägga ett belopp som motsvarar kvadraten av Marios ålder multiplicerat med 100, varje gång han fyller år. Marios farbröder Sergio och Riccardo funderar över hur mycket pengar mormor kommer att ha i burken på Marios 6-årsdag.

Sergio säger: *Man får reda på hur mycket pengar som finns i burken genom att beräkna integralen* $\int_0^6 100x^2\,dx$

Riccardo funderar ett tag och svarar: *Nej, den ger ett för litet värde.*

Förklara varför integralen ovan ger ett för litet värde om man använder den för att räkna ut hur mycket pengar det finns i burken på Marios 6-årsdag.

Jämför man integralen med det verkliga beloppet gäller:

	Verkligt	Integral
1-årsdag:	100 kr	$\int_0^1 100x^2\,dx = 33$ kr
2-årsdag:	100+400=500kr	266,7kr
3-årsdag:	500+900=1400kr	900 kr
4-årsdag:	1400+1600=3000kr	2133,3kr
5-årsdag:	3000+2500=5500kr	4167,7kr
6-årsdag:	5500+3600=9100kr	7200 Kr

Integralen ger ett för litet värde eftersom den inte tar hänsyn till beloppet som läggs till på själva födelsedagen.