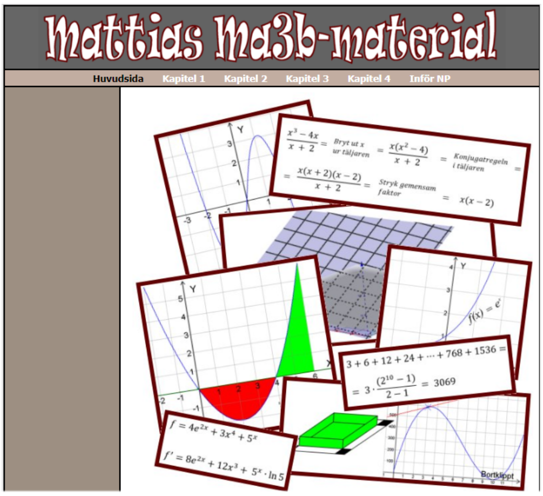


3.6 - Integraler

Vad menas med begreppet integral?

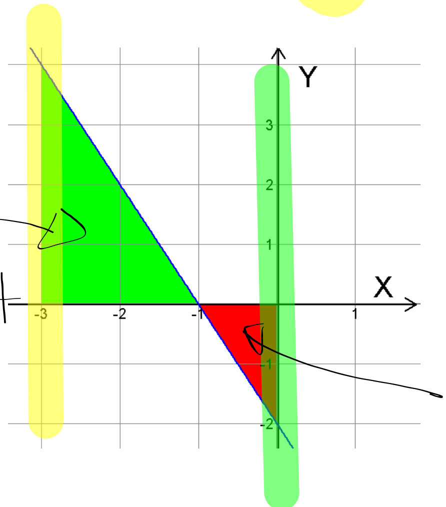
Grafiskt kan det tolkas som en "teckenarean" mellan x-axeln och en funktionsgraf, mellan 2 x-värden

Beteckning: $\int_a^b \text{Funktion}\, dx$

De 2 x-värdena som begränsar

Ex:

Räknas positivt



Räknas negativt

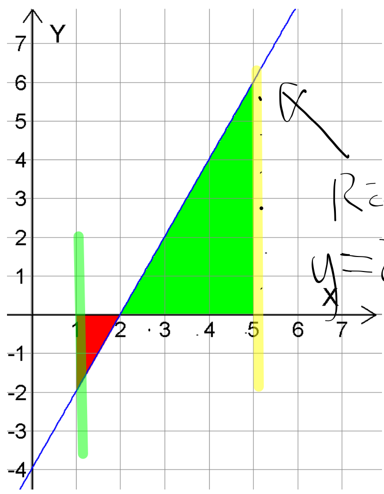
$$\int_{-3}^{0} (-2x-2)\,dx = +4 - 1$$
$$= 3$$

Exempel 1: Figuren till höger visar en integral.

a) Teckna integralen med hjälp av matematiska symboler

$$\int_{1}^{5} (2x-4)\,dx$$

b) Bestäm värdet av integralen



x

Rät linje $y = 2x - 4$

Pos. del: $\frac{3 \cdot 6}{2} = 9$

Neg. del: $\frac{1 \cdot 2}{2} = 1$

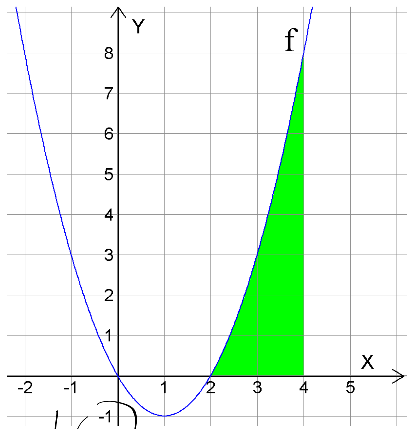
$$\int_{1}^{5} (2x-4)\,dx = +9 - 1 = 8$$

"Integralkalkylens fundamentalsats" - procedur

$$\int_a^b (\text{funktion})\,dx = \Big[\underset{F}{\text{Primitiv funktion}}\Big]_a^b$$

$$= F(b) - F(a)$$

Exempel 2: Figuren visar grafen till funktionen $f(x) = x^2 - 2x$ med en markerad integral. Bestäm värdet av integralen.



$$\int_2^4 (x^2 - 2x)\,dx = \Big[\underset{F = \frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2}}{\text{Primitiv}}\Big]_2^4$$

$$= \left[\begin{array}{l} F(4) = \frac{4^3}{3} - \frac{48}{3} = \frac{64}{3} - \frac{48}{3} = \frac{16}{3} \\ F(2) = \frac{8}{3} - \frac{12}{3} = -\frac{4}{3} \end{array}\right] =$$

$$\frac{16}{3} - \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{20}{3}$$

Exempel 3: Beräkna $\int_1^3 6x^2 - 4x + 1 \; dx$

Primitiv

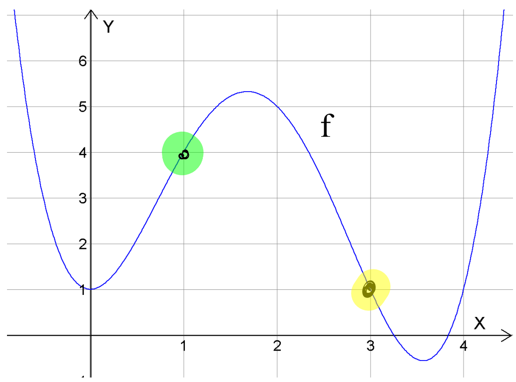
$$\int_1^3 (6x^2 - 4x + 1)\,dx = \left[F = 6\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + x \right]_1^3$$

$$= \left[\begin{array}{l} F(3) = 2 \cdot 3^3 - 2 \cdot 3^2 + 3 = 54 - 18 + 3 = 39 \\ F(1) = 2 \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 1 = 1 \end{array} \right]$$

$$= 39 - 1 = 38$$

Exempel 4: Figuren visar grafen till funktionen f

Bestäm värdet av $\int_1^3 f' \; dx$



Primitiv till f' är f

$$\int_1^3 f'\,dx = \left[f \right]_1^3$$

F

f

f'

f''

$$= \left[\begin{array}{l} f(3) = \\ f(1) = \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} \text{Grafen visar} \\ f \Rightarrow \text{Läs av grafen} \end{array} \right] \begin{array}{l} = 1 \\ = 4 \end{array}$$

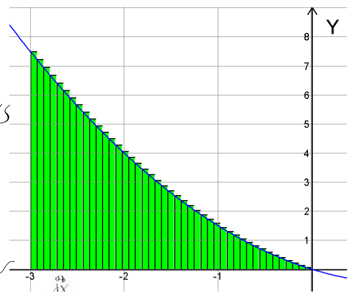
$$= 1 - 4 = -3$$

"Integralkalkylens fundamentalsats" - förklaring

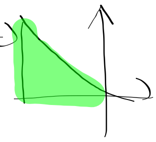
$\int$ betyder summa

$f \cdot dx$ = Höjden · Basen = Arean av små rektanglar

$\int f\,dx$ = Summan av n st rektanglars area.



Om n blir större kommer rektanglarnas sammanlagda area →



Hur lägger man ihop en jädra massa (oändligt antal) små värden?

Jmf med en motsvarande situation:
Tänk ett spel med poäng och omgångar:

Poäng innan omgång	Förändring
1000	+200
1200	+50
1250	−500
750	−50
700	osv

Vad blev resultatet?

Räkna ut summan av förändringarna = Slutsaldot − Startsaldot

$$\int f'\,dx = 700 - 1000 = -300$$

Oavsett antalet omgångar kommer summan av förändringarna motsvaras av

Slutsaldot − Startsaldot. ⇒

$$\int_a^b f'\,dx = \left[\begin{array}{c}\text{"Saldofunktion"} \\ \Rightarrow \text{Primitiv} \\ f\end{array}\right] = f(b) - f(a)$$

Integraler med digitala verktyg

Geogebra:

Integral( )

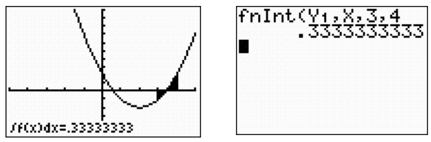
1. Integral(f) ⇒ Primitiv funk till f

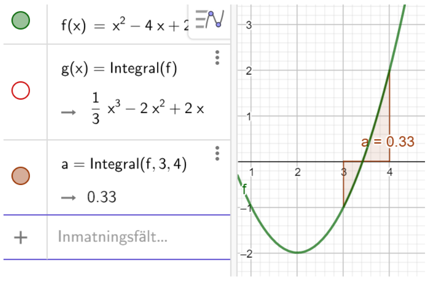
2. Integral(f, a, b) ⇒ Integralen av f mellan x = a och x = b

Miniräknare:

Grafiskt: [2nd] + [TRACE] + 7 ∫

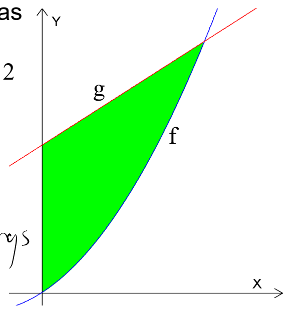
Icke-grafiskt: [MATH] - fnInt





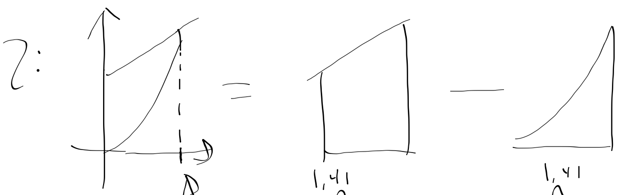
Exempel 5: Figuren visar ett område som begränsas av y-axeln samt graferna till de både funktionerna $f(x) = x^2 + x$ och $g(x) = x + 2$

Bestäm områdets area.
Svara med 2 decimaler!



Strategi: 1. Bestäm skärnings punkten

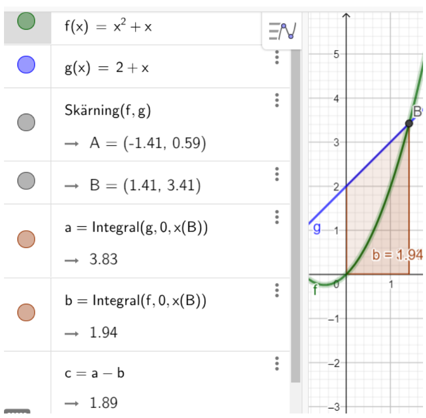
2:

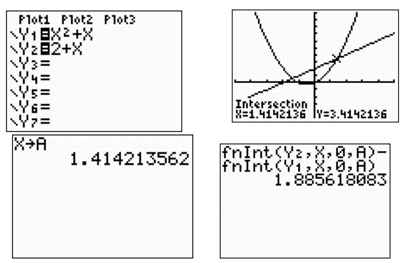


Skärning $x \approx 1,41$

$$\int_0^{1,41} g\,dx - \int_0^{1,41} f\,dx =$$

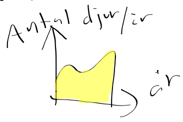
$$= 3,83 - 1,94 = 1,89$$





Tolkning av integralvärden

En integral motsvarar den enhet som fås via multiplikation mellan funktionens enhet och x-axelns enhet.

Ex: 

$\Rightarrow$ Integralen motsvarar Antal djur/år · år = Antal djur

Exempel 6: Hastigheten hos en bil som accelererar ges av funktionen $v(t) = 40 \cdot (1 - 0.75^t)$ där v är hastigheten i m/s efter t sekunder.

a) Bestäm hastigheten efter 3 sekunder.

b) Bestäm och tolka värdet av $\int_1^3 v(t)\,dt$

Enhetsanalys:

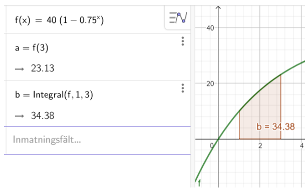
Funk: m/s

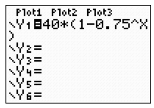
Integralen: m/s · s = m

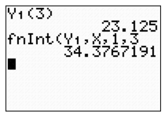
a) Hastigheten efter 3 s = $v(3) = 23{,}13$ m/s

b) $\int_1^3 v\,dt = \begin{bmatrix}\text{Integral} \\ \text{el.} \\ \text{fnInt}\end{bmatrix} = 34{,}38$ m

Mellan $t = 1$ s och 3 s åker bilen 34,4 m







Exempel 7: År 2010 bor det i en viss stad 40 000 invånare.
Enligt en prognos kommer invånarantalet att öka med hastigheten $500 \cdot e^{0{,}04x}$ invånare / år under de kommande x åren räknat efter år 2010.
Hur många invånare har staden år 2030 enligt prognosen?

Enhetsanalys:

f: invånare/år

Int: invånare/år · år = Antal invånare (som lagts till)

Antal invånare som lagts till från 2010 till 2030 $= \int_0^{20} 500 \cdot e^{0{,}04x}\,dx = \begin{bmatrix}\text{Integral} \\ \text{el.} \\ \text{fnInt}\end{bmatrix} =$

$= 15319$ st

Totalt: $40000 + 15319 =$
55319 invånare år 2030 enligt prognosen.