FACIT

Kapitel 3 - Repetition

Del 1a – Utan digitalt hjälpmedel – Endast svar

1. Bestäm $f''(x)$ om...

a) $f(x) = 3x^4 - 2x^2$

$f'(x) = 12x^3 - 4x$

Svar: $f''(x) = 36x^2 - 4$ (1/0/0)

b) $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{2}$

$f'(x) = \dfrac{2x+1}{2}$

Svar: $f''(x) = \dfrac{2}{2} = 1$ (1/0/0)

c) $f(x) = 5e^{2x}$

$f'(x) = 5 \cdot e^{2x} \cdot 2$

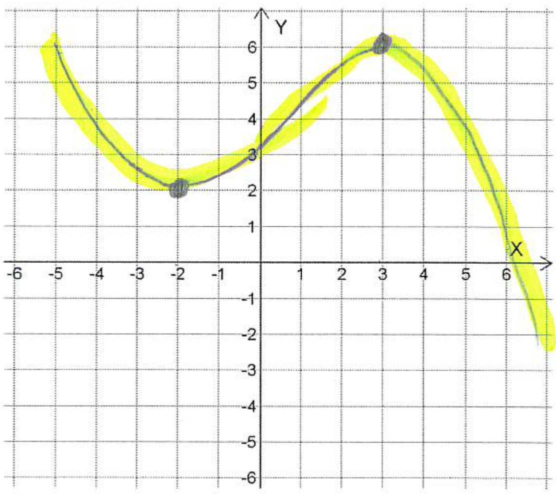
Svar: $f''(x) = 10e^{2x} \cdot 2$ (1/0/0)

$= 20e^{2x}$

2. Nedan visas en teckentabell över en funktion, *f*.

a) Gör en **grov skiss** över hur funktionens graf ser ut i koordinatsystemet. (1/0/0)

		-2		3		x
f		2		6		
f'	$-$	0	$+$	0	$-$	



b) Ange koordinaterna för *extrempunkterna* till f.

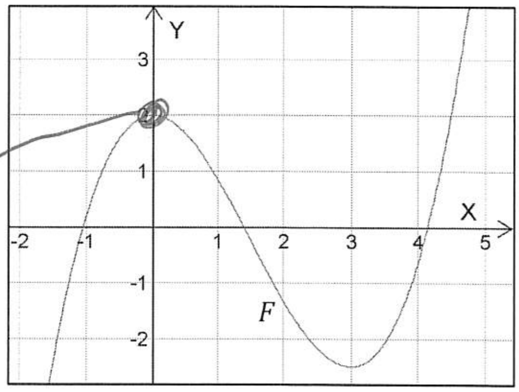
Svar: Min: $(-2, 2)$ Max: $(3, 6)$ (1/0/0)

c) Ange alla värden på x där funktionen f är *växande*.

Svar: $-2 \leq x \leq 3$ (0/1/0)

3. Figuren visar grafen till en primitiv funktion, F, till $f(x) = 2x^2 - 6x$

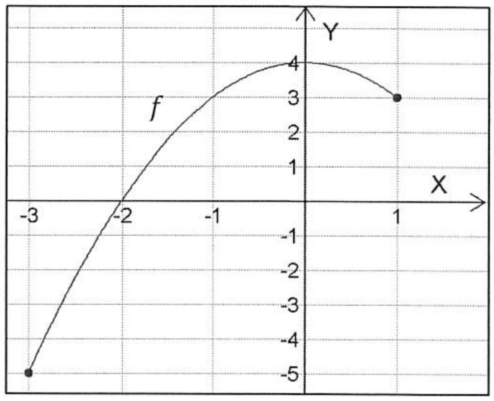
Bestäm funktionsuttrycket för funktionen i grafen.



Svar: $F(x) = 2\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 2$ (2/0/0)

4. Figuren till höger visar grafen till en funktion, f, definerad i intervallet $-3 \leq x \leq 1$

Bestäm funktionens största och minsta värde.



Svar: Största värde: 4

Minsta värde: -5 (1/0/0)

5. Bestäm värdet av integralen $\int_0^2 (5 - 2x)\,dx$ $= \left[F = 5x - x^2\right]_0^2 = \left[\begin{matrix} F(2) = 6 \\ F(0) = 0 \end{matrix}\right]$

Svar: $6 - 0 = 6$ (1/0/0)

6. Rita i koordinatsystemet till höger grafen till valfri funktion, f, som uppfyller samtliga villkor nedan: (2/1/0)

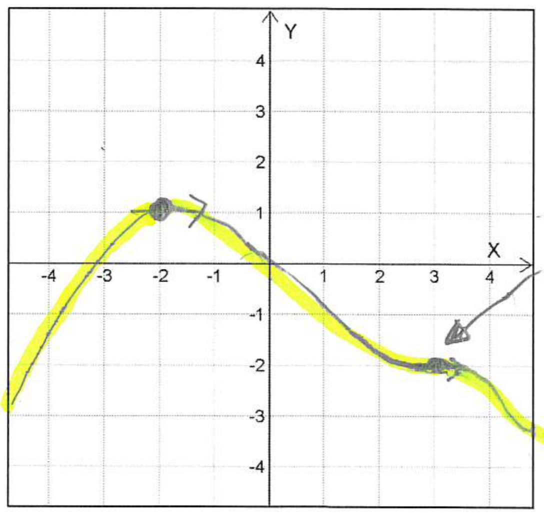
f är avtagande för alla $x \geq 1$.

f har en terasspunkt i $(3, -2)$

$f(-2) = 1$ $\Rightarrow$ Punkten $(-2, 1)$...

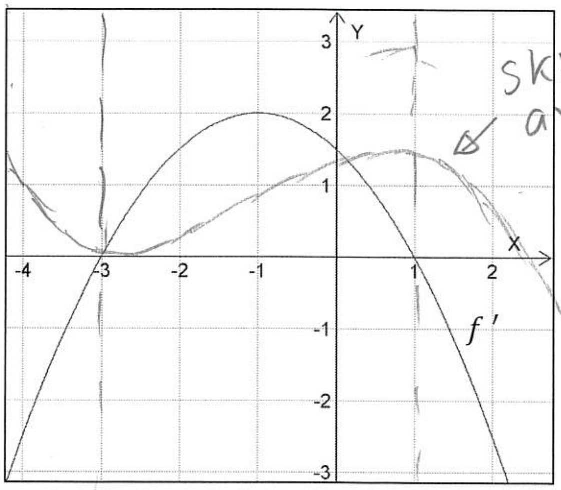
$\rightarrow$ $f'(-2) = 0$ ... är en vändpunkt.

$\cap$ $f''(-2) < 0$ .... som är ett max



Neg. teress vid $(3, -2)$

7. Figuren nedan visar grafen till derivatafunktionen $f\,'$.



Skiss av f

a) Bestäm det x-värde där funktionen f har ett lokalt maximum. $\Rightarrow f': + \ 0 \ -$

Svar: $x = 1$ (0/1/0)

b) Bestäm alla x-värden där f är avtagande. $\Rightarrow f': -$

Svar: $x < -3$, $x > 1$ (0/1/0)

c). Bestäm värdet av integralen $\int_{-1}^{1} f\,''(x)\,dx$ $= \left[\begin{matrix}\text{Primitiv till } f'' \\ \text{är } f'\end{matrix}\right] = \left[\begin{matrix}f'(1) = 0 \\ f'(-1) = 2\end{matrix}\right]$

Svar: $0 - 2 = -2$ (0/0/1)

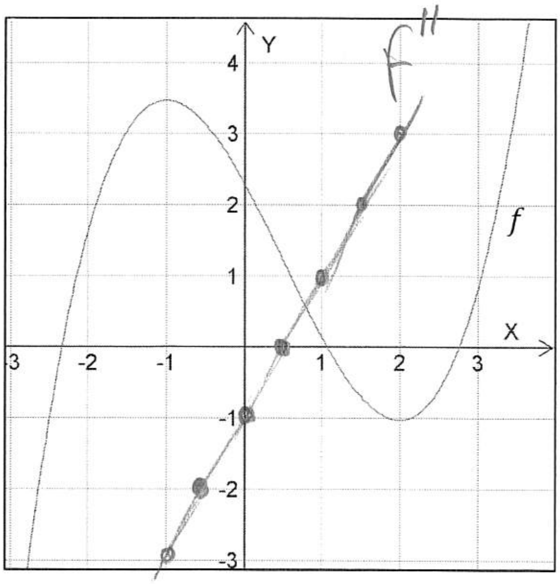
8. För funktionen f gäller att $f'(x) = e^{-2x} - x + \dfrac{4}{x^3}$ $= e^{-2x} - x + 4x^{-3}$

$f(x) = \dfrac{e^{-2x}}{2} - \dfrac{x^2}{2} + 4\dfrac{x^{-2}}{-2} + C$

Bestäm *samtliga möjliga* funktionsuttryck till F

Svar: $\dfrac{e^{-2x}}{4} - \dfrac{x^3}{6} + 2x^{-1} + Cx + D$ (0/0/1)

9. Grafen till tredjegradsfunktionen f visas till höger.



a) Lös ekvationen $f''(x) = 0$ $\Rightarrow$ Symm. linjen hos f'

Svar: $x = 0{,}5$ (0/0/1)

b) För funktionen gäller att $f''(1) = 1$

f'' är en rät linje med $k = 2$

Bestäm värdet av $f''(-1)$

Svar: -3 (0/0/1)

Del 1b – Utan digitalt hjälpmedel – Fullständiga uträkningar krävs

10. För funktionen f gäller att $f(x) = -x^2 + 6x + 2$ $\quad -x^2 \Rightarrow \cap \Rightarrow$ max

Bestäm koordinaterna för funktionens extrempunkt, samt ange dess karaktär. (2/0/0)

$f'(x) = -2x + 6$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \quad -2x + 6 = 0$

$2x = 6$

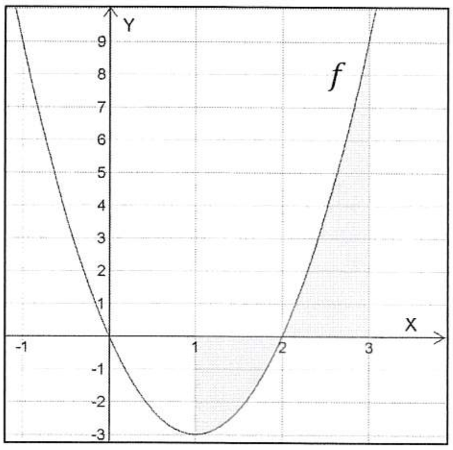
$x = 3$

max punkt vid $(3, 11)$

y-koord ges av $f(3) = -3^2 + 6 \cdot 3 + 2 = -9 + 18 + 2 = 11$

11. Figuren till höger visar grafen till funktionen $f(x) = 3x^2 - 6x$ med en integral.

Bestäm värdet av integralen i figuren. (2/0/0)



Enligt bilden är x-värdena vid $x = 1$ och $x = 3 \Rightarrow$

$$\int_1^3 (3x^2 - 6x)\,dx = \left[F = x^3 - 3x^2\right] =$$

$$= \begin{bmatrix} F(3) = 27 - 27 = 0 \\ F(1) = 1 - 3 = -2 \end{bmatrix} = 0 - (-2) = 2$$

12. Bestäm en primitiv funktion F till $f(x) = 3x^2 + 2x - 3$ sådan att $F(1) = 5$ (2/0/0)

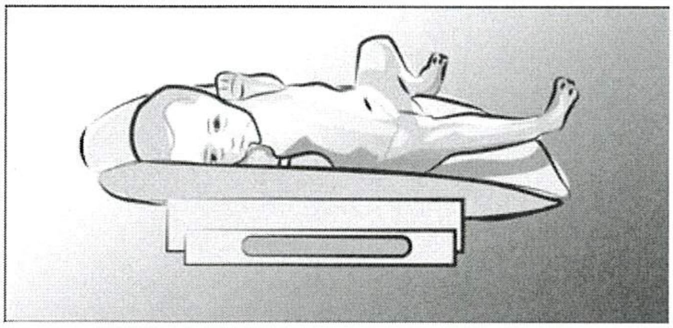
Alla primitiva funk: $F(x) = \frac{3x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} - 3x + C$

$= x^3 + x^2 - 3x + C$

Det C som ger $F(1) = 5$ $\Rightarrow \quad 1^3 + 1^2 - 3 \cdot 1 + C = 5 \Rightarrow C = 6$

Rätt prim: $F(x) = x^3 + x^2 - 3x + 6$

13. Nedanstående uppgift är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften. (3/0/0)



Nyfödda barn förlorar normalt i vikt de första dygnen innan vikten ökar igen. För att kunna undersöka om barnen följer den normala viktutvecklingen har man på ett sjukhus samlat in uppgifter om nyfödda barns viktutveckling och ställt upp funktionen:

$V(t) = 5t^3 - 135t + 3500$

där V är medelvikten i gram och t är tiden i dygn efter födseln. Sambandet gäller under de första 6 dygnen efter födseln.

Visa att funktionen som beskriver medelvikten har ett lokalt minimum då $t = 3$.

$V' = 15t^2 - 135$

$V' = 0 \Rightarrow 15t^2 - 135 = 0$

$t^2 = 9$

$t_1 = 3 \quad (t_2 = -3)$

$\Rightarrow$ vändpunkt vid $t = 3$

För att visa att $t=3$ är ett min. kan andraderivatan användas

$V'' = 30t$

$V''(3) = +90 \Rightarrow \cup \Rightarrow$ min vid $t=3$ vsv

14. Nedanstående uppgift är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften. (0/2/0)

För funktionen f gäller att $f(2) = 3$ och $f'(x) = 0{,}5$ för alla x.

Beräkna $\int_2^6 f(x)\,dx$.

Om $f'(x) = 0{,}5$ för alla x gäller $f(x) = 0{,}5x + C$

$f(2) = 3 \Rightarrow 0{,}5 \cdot 2 + C = 3 \Rightarrow C = 2$

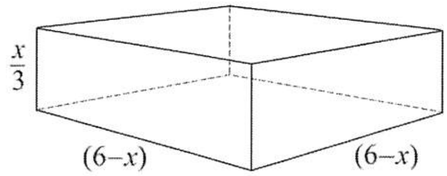
$f(x) = 0{,}5x + 2$

$$\int_2^6 (0{,}5x+2)\,dx = \left[F = \frac{0{,}5x^2}{2} + 2x\right]_2^6 = \left[\begin{matrix} F(6) = 9 + 12 = 21 \\ F(2) = 1 + 4 = 5 \end{matrix}\right]$$

$= 21 - 5 = 16$

15. Nedanstående uppgift är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften. (1/3/0)

Figuren visar ett rätblock med sidorna $\frac{x}{3}$, $(6-x)$ och $(6-x)$ l.e.
Använd derivata och beräkna rätblockets största möjliga volym.



Volymen ges av $V=\frac{x}{3}\cdot(6-x)\cdot(6-x)=$

$=\frac{x}{3}\cdot(36-12x+x^2)=12x-4x^2+\frac{x^3}{3}$

$V'=12-8x+x^2$

$V'=0 \Rightarrow x^2-8x+12=0$

"p-q" $\boxed{4}\pm\sqrt{4\cdot4-12}$

$x_1=4+2=6 \quad x_2=4-2=2$

$x_1=6$ ger volymen noll

$\Rightarrow x=2$ ger största volymen

Största volymen $=V(2)$

$=\frac{2}{3}\cdot(6-2)(6-2)=$

$=\frac{2}{3}\cdot16=\frac{32}{3}$ v.e

16. För tredjegradsfunktionen f gäller att den har två extrempunkter vid $(0,6)$ och $(3,0)$. Bestäm funktionsuttrycket för f. (0/0/3)

Extrempunkter vid $x=0$ och $x=3$ $\Rightarrow f'=a\cdot(x-0)(x-3)=ax^2-3ax$

$f=\frac{ax^3}{3}-3a\frac{x^2}{2}+C$

$(0,6)\Rightarrow \frac{a\cdot0^3}{3}-3a\cdot\frac{0^2}{2}+C=6 \Rightarrow C=6$

$(3,0)\Rightarrow \frac{a\cdot3^3}{3}-3\cdot a\cdot\frac{3^2}{2}+6=0$

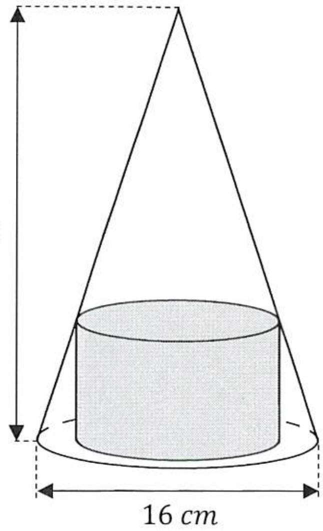
$9a-13{,}5a+6=0 \Rightarrow -4{,}5a=-6$

$a=\frac{6}{4{,}5}=\frac{4}{3}$

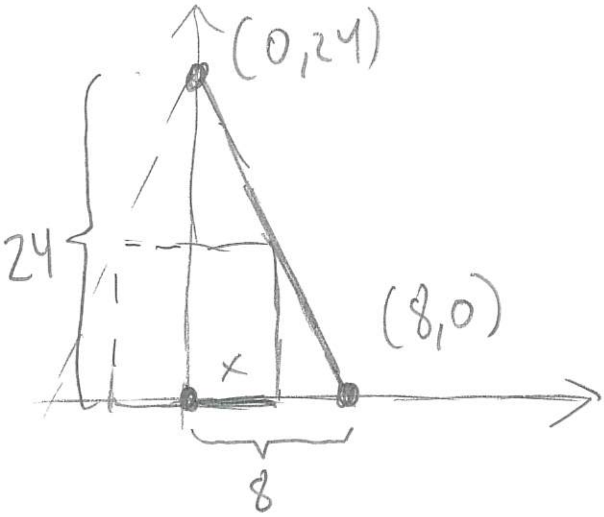
$\Rightarrow f(x)=\frac{4}{3}\cdot\frac{x^3}{3}-3\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{x^2}{2}+6=\frac{4x^3}{9}-2x^2+6$

17. En cylinder placeras inuti en kon med mått enligt figuren.

Bestäm den radie som cylindern ska ha för att få en så stor volym som möjligt (0/0/3)



Skrivs figuren in i ett koord system gäller:



Konens sida ges av den linjära funktionen $y = kx + m$

$(0,24) \Rightarrow m = 24$

$\begin{matrix}(0,24)\\(8,0)\end{matrix} \Rightarrow k = \frac{0-24}{8-0} = \frac{-24}{8} = -3$

$\Rightarrow y = -3x + 24$

Cylinders radie x ger $V_{cyl} = \pi \cdot r^2 \cdot h = \left[\begin{matrix} r = x \\ h = y = -3x+24 \end{matrix}\right]$

$= \pi \cdot x^2 \cdot (-3x + 24) = -3\pi x^3 + 24\pi x^2$

$V_{cyl}' = -9\pi x^2 + 48\pi x$ $\quad V_{cyl}' = 0 \Rightarrow$

$-9\pi x^2 + 48\pi x = 0$

$V_{cyl}'' = -18\pi x + 48\pi$

[Bryt ut πx] $\pi x(-9x + 48) = 0$

$V_{cyl}(0) = + \Rightarrow \cup$ $\quad x_1 = 0$

$V_{cyl}\left(\frac{16}{3}\right) = - \Rightarrow \cap$ $\quad x_2 = \frac{48}{9} = \frac{16}{3}$

$\Rightarrow$ Radien $\frac{16}{3}$ cm ger största volymen

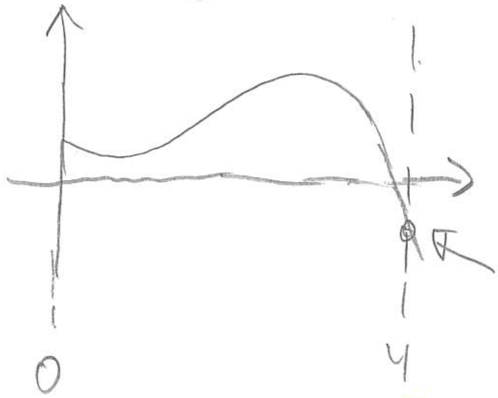
Del 2 – Med digitalt hjälpmedel – Fullständiga uträkningar krävs

D1. För funktionen f gäller att $f(x) = -x^3 + 5x^2 - 5{,}25x + 3$.

Bestäm funktionens största och minsta värde i intervallet $0 \leq x \leq 4$

Svara med 2 decimaler! (2/0/0)

Ritas grafen i det aktuella intervallet fås:



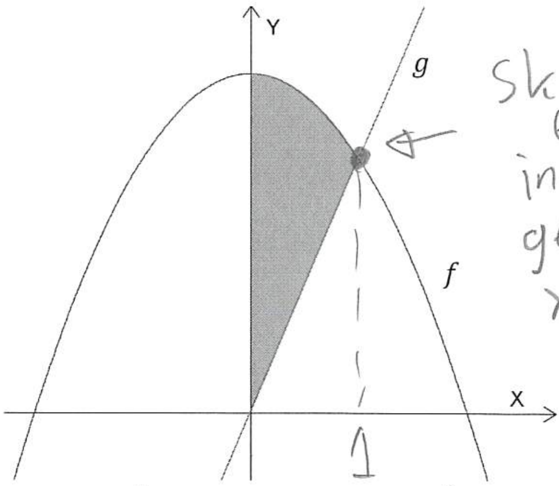
Extrempunkt eller Maximum ger $x = 2{,}68$ $y = 5{,}59$

Minsta värde $= f(4) = -2$

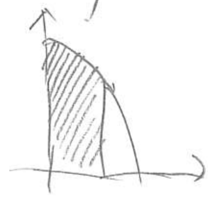
Största värde: 5,59 Minsta värde: −2

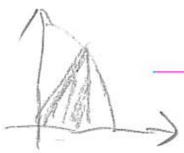
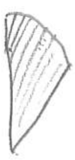
D2. Figuren till höger visar ett område som begränsas av y-axeln samt graferna till de två funktionerna $f(x) = 4 - x^2$ och $g(x) = 3x$

Bestäm arean av detta område. (2/1/0)



Skärning el. intersect ger $x = 1$

Området fås genom att utgå från  och

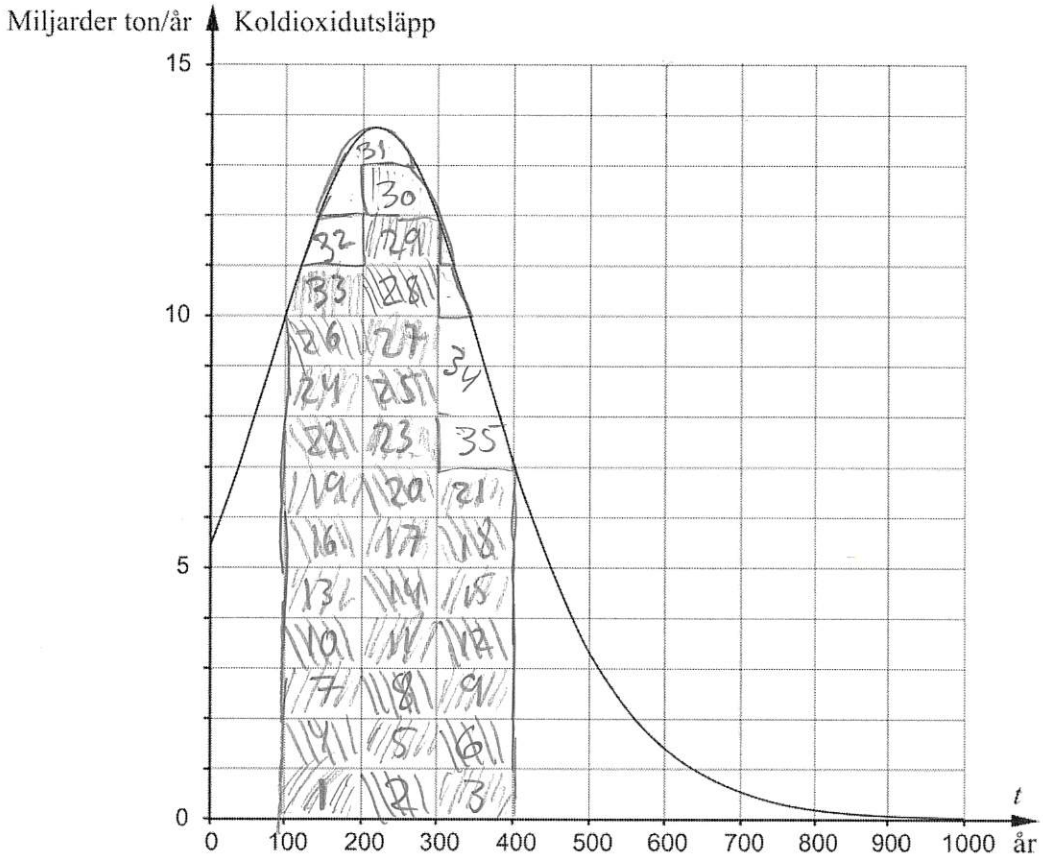
ta bort  dvs  $= \int_0^1 (4 - x^2)\,dx - \int_0^1 3x\,dx$

$= \begin{bmatrix} \text{Integral} \\ \text{el.} \\ \text{FnInt} \end{bmatrix} = 3{,}67 - 1{,}5 =$

$= 2{,}17$ ae $\left(= \frac{13}{6} \text{ ae}\right)$

D3. Nedanstående uppgift är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften. (1/1/0)

En prognos för de årliga koldioxidutsläppen i världen för de kommande tusen åren beskrivs med hjälp av grafen nedan. Tiden $t = 0$ motsvarar år 2000.



Uppskatta med hjälp av grafen hur mycket koldioxid som kommer att släppas ut mellan åren 2100 och 2400.

Enhetstest:

funktionen: Miljarder ton/år

integralen: Miljarder ton/år · År = Miljarder ton

⇒ Mängden koldioxid ges av integralen.

Varje ruta motsvarar 100 miljarder ton

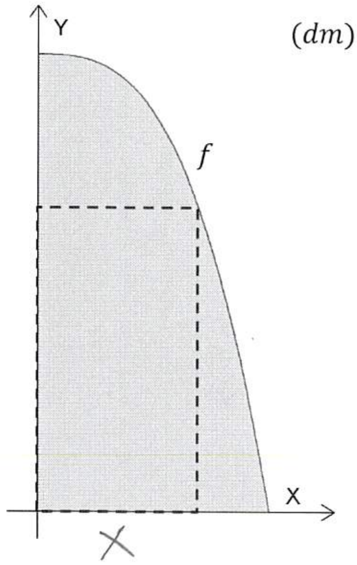
Ungefär 35 rutor ⇒ Ungefär 3500 miljarder ton

D4. Ur ett stort grönt papper har klippts ut en stor bit. Det kvarvarande pappret har en form som (märkligt nog) kan beskrivas med funktionen $f(x) = 15 - 0{,}05x^3$

där x är bredden i dm och f är motsvarande höjd i dm.

Mrs. Green vill använda den kvarvarande pappersbiten, men behöver ett papper format som en rektangel.

Hjälp Mrs. Green med att ta fram måtten hos den största möjliga rektangeln. (0/3/0)



Om rektangelns bas kallas x gäller $A = \text{Bas} \cdot \text{Höjd} = x \cdot f =$

$= x \cdot (15 - 0{,}05x^3)$

Ritas grafen till $A(x)$ fås:

Maximum ger $x = 4{,}21 \Rightarrow$ Höjden ges av $f(4{,}21) =$

$= 11{,}25$

$\Rightarrow$ Största rektangelns mått:
Bas = 4,2 dm Höjd = 11,25 dm

D5. Nedanstående uppgift är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften. (0/2/0)

En funktion f har egenskaperna:

- $f'(x) = -2$ $\Rightarrow$ $f(x) = -2x + C$
- $\int_0^3 f(x)\,dx = 3$ $= \left[F = -x^2 + Cx\right]_0^3 = \left[\begin{matrix} F(3) = -9 + 3C \\ F(0) = 0 \end{matrix}\right]$

Bestäm $f(x)$

$$\int_0^3 f(x)\,dx = 3 \Rightarrow F(3) - F(0) = 3$$

$$-9 + 3C - 0 = 3$$

$$3C = 12$$

$$C = 4$$

$$f(x) = -2x + 4$$

Det går även att lösa uppgiften mha t.ex glidare i Geogebra:

$f(x) = -2x + C$

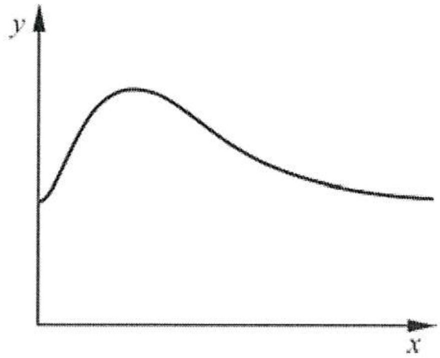
Integral(f, 0, 3)

D6. Nedanstående uppgift är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften.

När Johan äter 50 gram vitt bröd till frukost ändras hans blodsockerhalt. Blodsockerhalten mäts i millimol per liter (mmol/l).
Blodsockerhalten, y mmol/l kan beskrivas med modellen

$$y = 0{,}032 \cdot x^2 \cdot e^{-0{,}070x} + 4{,}0 \quad , \quad 0 \leq x \leq 120$$

där x är antalet minuter efter det att Johan ätit sin frukost.



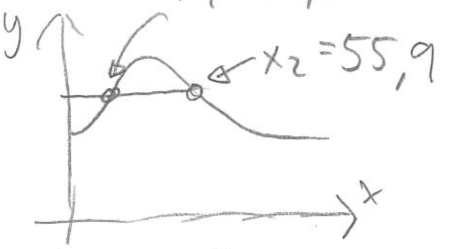
Du ser i figuren att blodsockerhalten ökar när Johan har ätit sin frukost. Blodsockerhalten når sedan sitt största värde för att därefter avta.

a) Under hur lång tid är blodsockerhalten över 6,0 mmol/l? (1/1/0)

b) Hur lång tid efter frukosten börjar blodsockerhalten att avta? (1/0/0)

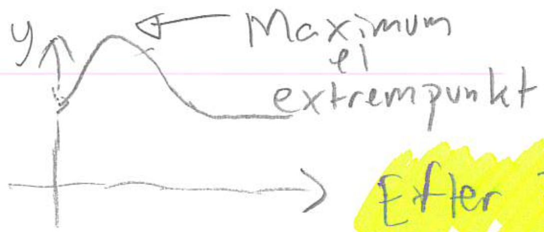
c) När sjunker blodsockerhalten som snabbast? (0/1/1)

a) Rita upp linjen $y = 6$ och läs av de båda skärningspunkterna



Tiden mellan $\Rightarrow$ $x_2 - x_1 = 43{,}9$ min

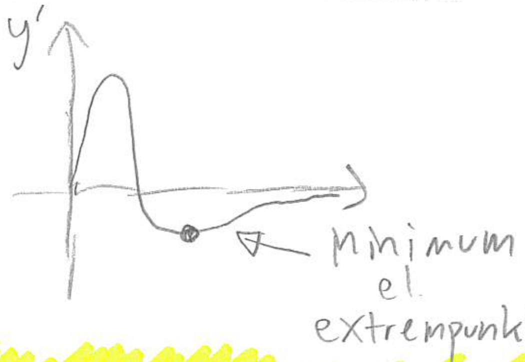
b) Hitta extrempunkten



$x = 28{,}6$

Efter 28,6 minuter

c) Rita derivatagrafen och hitta dess minsta värde



$x = 48{,}8$

Sjunker snabbast vid 48,8 min

D7. Nedanstående uppgift är ifrån ett gammalt kursprov. Lös uppgiften. (0/3/0)

De styrande i ett land är osäkra på befolkningsutvecklingen i landet. De anlitar två olika konsulter för att de ska göra var sin prognos över befolkningsutvecklingen de kommande åren.

Den första konsulten anser att folkmängden kommer att växa med hastigheten $100e^{0,02t}$ tusen personer per år.

Den andra konsulten anser att folkmängden kommer att växa med hastigheten $100 + 0,2t + 0,02t^2$ tusen personer per år.

I båda prognoserna är t tiden i år räknat från början av år 2000.

Prognoserna ger olika besked om hur mycket befolkningen kommer att öka. Hur stor är skillnaden i folkmängd mellan de båda prognoserna i början av år 2015?

Enhetstest:

funktionen personer/år

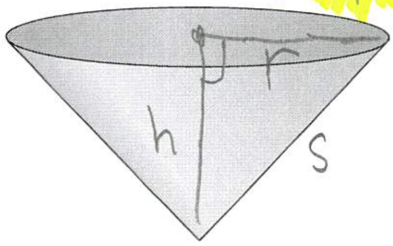
Integralen personer/år · år = personer ⇒ Integralen ger antal personer

Prognos 1: $\int_0^{15} (100e^{0,02t})\,dt = \begin{bmatrix}\text{Integral}\\ \text{el.}\\ \text{fnInt}\end{bmatrix} = 1749$

Prognos 2: $\int_0^{15} (100 + 0,2t + 0,02t^2)\,dt = \begin{bmatrix}\text{Integral}\\ \text{el.}\\ \text{fnInt}\end{bmatrix} = 1545$

Skillnaden $= 1749 - 1545 = 204$ tusen personer

D8. En snabbmatskedja har en temakampanj där de vill erbjuda sina kunder att köpa milkshake i en konformad bägare som placeras i en hållare i stället för att få milkshaken i ett klassiskt glas.



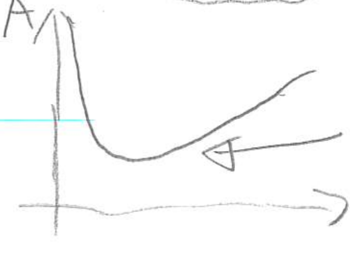
Bestäm vilka mått en sådan konformad bägare ska ha för att materialåtgången ska bli så liten som möjligt och ha volymen 300 cm^3 (0/0/3)

Materialåtgången ges av Mantelytan $= A = \begin{bmatrix}\text{Formel-}\\ \text{bladet}\end{bmatrix} = \pi \cdot r \cdot s =$

$= \begin{bmatrix}\text{Pyth. sats ger}\\ s = \sqrt{r^2 + h^2}\end{bmatrix} = \pi \cdot r \cdot \sqrt{r^2 + h^2} = \begin{bmatrix} V = 300 \Rightarrow \frac{\pi r^2 \cdot h}{3} = 300 \\ h = \frac{900}{\pi r^2}\end{bmatrix}$

$= \pi \cdot r \cdot \sqrt{r^2 + \left(\frac{900}{\pi r^2}\right)^2}$

Ritas grafen fås



Minimum el. extrempunkt $r = 5,87$ cm

Höjden blir då $h = \frac{900}{\pi \cdot 5,87^2} = 8,31$ cm

⇒ Radien = 5,87 cm
Höjden = 8,31 cm

D9. Nedanstående sammanhang är ifrån ett gammalt nationellt prov.

Två ridintresserade systrar har länge önskat sig en egen paddock (ridbana) hemma på gården där de bor.

Paddocken ska ha en rektangulär form och placeras så att två av dess hörn ligger mot grusvägarna och dess långsida ligger utmed asfaltsvägen enligt figuren.

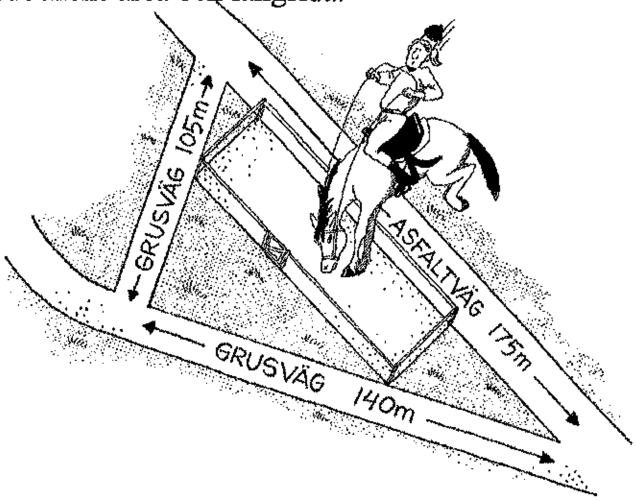
Systrarna räknar ut ett samband mellan paddockens area och långsida. Sambandet ser ut enligt följande:

$A(x) = 84x - 0{,}48x^2$

där A är paddockens area i kvadratmeter och x är paddockens långsida i meter.

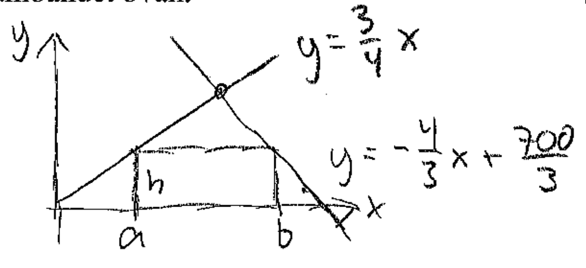
Utgå från att de tre vägarna beskrivas med x-axeln och de två räta linjerna

$y = -\frac{4}{3}x + \frac{700}{3}$ och $y = \frac{3}{4}x$

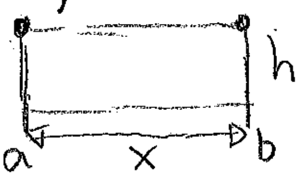


Visa hur systrarna har kommit fram till sambandet ovan. (0/0/4)

Ritas graferna fås :



För rektangeln gäller



$x = b - a \Rightarrow b = (a+x)$

$h = \frac{3}{4}a = -\frac{4}{3}b + \frac{700}{3} \Rightarrow [b = a+x]$

y-värdet vid a

y-värdet vid b

(Samma höjd vid båda x-värdena)

$\frac{3}{4}a = -\frac{4}{3}(a+x) + \frac{700}{3} \Rightarrow \frac{3}{4}a = -\frac{4}{3}a - \frac{4}{3}x + \frac{700}{3}$ $[\cdot 3]$

$\frac{9}{4}a = -4a - 4x + 700$ $[+4a] \Rightarrow \frac{9}{4}a + 4a = -4x + 700$ $[\frac{9}{4}a + 4a = \frac{25}{4}a]$

$\frac{25a}{4} = -4x + 700 \Rightarrow a = \frac{-16x + 2800}{25} = -0{,}64x + 112$

$A = \text{Basen} \cdot \text{Höjden} = x \cdot h = [h = \frac{3}{4}a] = x \cdot \frac{3}{4}a = [a = -0{,}64x + 112]$

$= x \cdot \frac{3}{4} \cdot (-0{,}64x + 112) = -0{,}48x^2 + 84x$ VSV.