

### Del 1a – Utan digitalt hjälpmedel – Endast svar

1. Nedan visas en del av ett "släkträd" för två "funktionssläkter".

Komplettera "släkträdet" genom att fylla i möjliga funktioner på de tomma raderna.

Endast en primitiv funktion behöver anges.  $\Rightarrow$  Ingen konstant behövs. (4/0/0)

$$F(x) = 9\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + 2x$$

$$G(x) = 6 \cdot \frac{e^{2x}}{2} = 3e^{2x}$$

$$f(x) = 9x^2 + 5x + 2$$

$$g(x) = 6e^{2x}$$

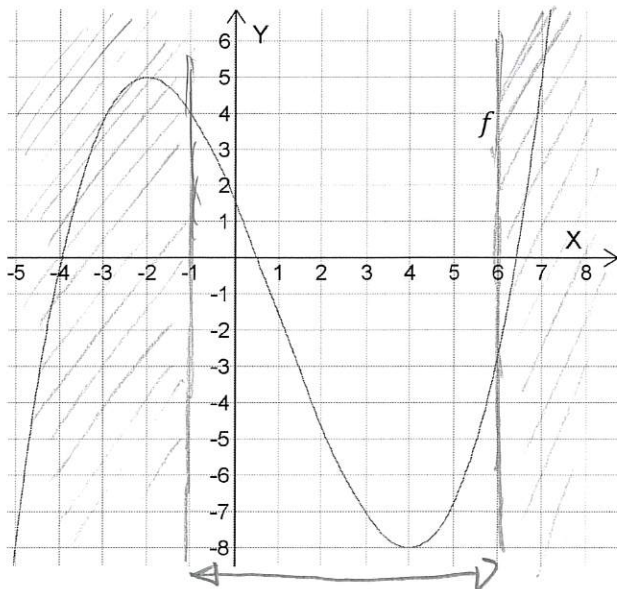
$$f'(x) = 18x + 5$$

$$g'(x) = 6e^{2x} \cdot 2 = 12e^{2x}$$

$$f''(x) = 18$$

$$g''(x) = 24e^{2x}$$

2. Nedan visas grafen till funktionen  $f$ .



a) Ange koordinaterna för extrempunkterna till  $f$ .

Svar:  $(-2, 5)$  och  $(4, -8)$  (1/0/0)

b) Ange funktionens största och minsta värde i intervallet  $-1 \leq x \leq 6$ .

Svar: Största värde:  $4$   
 Minsta värde:  $-8$  (2/0/0)

3. Figuren till höger visar grafen till en tredjegradsfunktion,  $f$ .

Nedanför syns fem andra grafer, A – E

a) En av graferna A – E visar *derivatafunktionen*  $f'$ ?

Vilken av graferna är det?

*= Andragradare*

Svar:     **B**     (1/0/0)

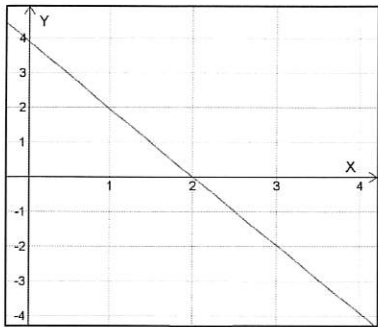
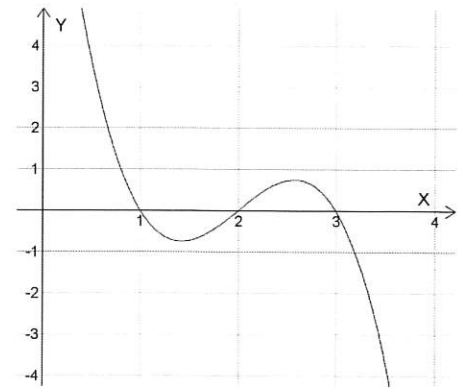
b) En av graferna A – E visar den *primitiva funktionen*  $F$

Vilken av graferna är det?

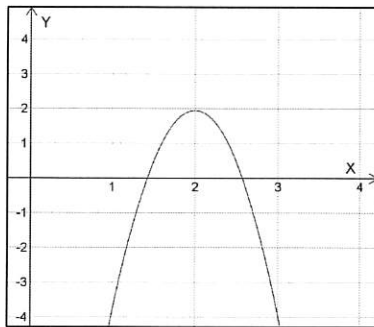
*= Fjärdegradare*

*(3 vändpunkter)*

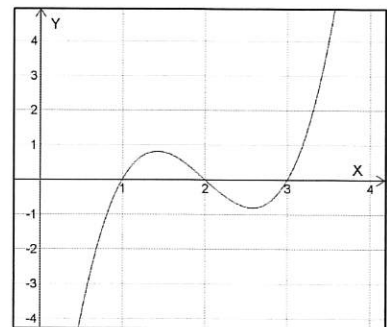
Svar:     **D**     (1/0/0)



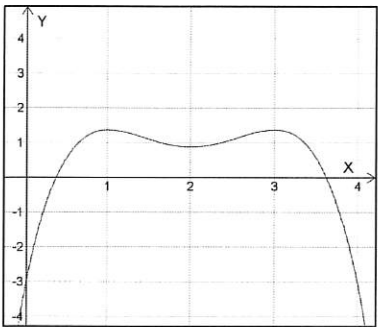
A



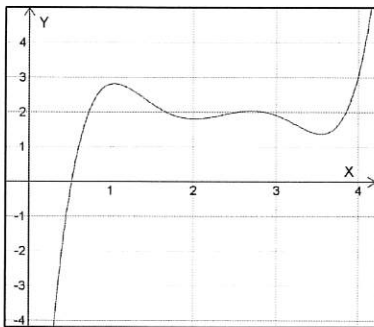
B



C



D



E

4. Figuren till höger visar en integral.

a) Teckna integralen med matematiska symboler.

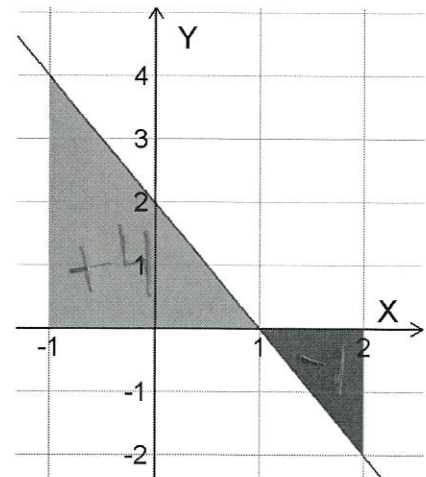
Svar:      $\int_{-1}^2 (-2x+2) dx$      (1/0/0)

*Handwritten integral:  $\int_{-1}^2 (-2x+2) dx$*

b) Bestäm integralens värde

Svar:      $4 - 1 = 3$      (1/0/0)

*Handwritten calculation:  $4 - 1 = 3$*



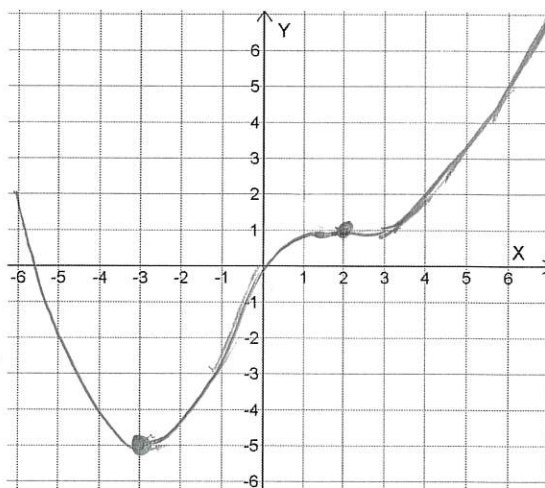
5. Nedan visas en teckentabell över en funktion,  $f$ .

a) Gör en **grov skiss** över hur funktionens graf ser ut i koordinatsystemet. (2/0/0)

	-3		2		$x$
$f$	-5		1		
$f'$	-	0	+	0	+

Min punkt  
vid  $(-3, -5)$

Pos. terrass  
vid  $(2, 1)$



b) Ange tre valfria  $x$ -värden där  $f$  är avtagande.

Alla  $x$  till vänster om  $x = -3$

Svar:  $x < -3$  (1/0/0)

6. Uppgiften nedan är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften.

Vilka två av funktionerna  $F(x)$  nedan är primitiv funktion till  $f(x) = 3x^5 + 1$ ?

A  ~~$F(x) = \frac{3x^4}{4}$~~

B  ~~$F(x) = 15x^4$~~

C  $F(x) = 0,5x^6 + x \quad \nabla C = 0$

D  ~~$F(x) = x^6 + 2x$~~

E  ~~$F(x) = \frac{x^6}{3} + x + 1$~~

F  $F(x) = \frac{x^6}{2} + x - 14 \quad \nabla C = -14$

$$f(x) = 3x^5 + 1$$

Alla prim.  $\therefore F(x) = \frac{3x^6}{6} + x + C$

$$= \frac{1}{2}x^6 + x + C$$

Svar: C, F (1/0/0)

Del 1b – Utan digitalt hjälpmedel – Fullständiga uträkningar krävs

7. Bestäm värdet av integralen  $\int_1^2 3x^2 + 4x \, dx$  (2/0/0)

$$\int_1^2 (3x^2 + 4x) \, dx = \left[ F = x^3 + 2x^2 \right]_1^2 =$$

$$= \left[ \begin{array}{l} F(2) = 2^3 + 2 \cdot 2^2 = 8 + 8 = 16 \\ F(1) = 1^3 + 2 \cdot 1^2 = 1 + 2 = 3 \end{array} \right] = 16 - 3 = 13$$

8. För funktionen  $f$  gäller att  $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 2$

Bestäm koordinaterna för funktionens båda extrempunkter, samt ange deras karaktär.

(3/0/0)

1. Derivera  $f'(x) = 6x^2 - 12x$

2. Lös ekv  $f' = 0$   $6x^2 - 12x = 0$

$$x^2 - 2x = 0$$

Bryt ut  $x$   
 $x(x-2) = 0$   
 $x_1 = 0 \quad x_2 = 2$

pq  
 $+1 \sqrt{1 \cdot 1 - 0}$   
 $x_1 = 1 - 1 = 0$      $x_2 = 1 + 1 = 2$

3. Beräkna  $y$ -värdena  
 $f(0) = 2 \cdot 0^3 - 6 \cdot 0^2 + 2 = 2 \Rightarrow (0, 2)$   
 $f(2) = 2 \cdot 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 2 =$   
 $= 16 - 24 + 2 = -6 \quad (2, -6)$

4. Maxpunkt vid  $(0, 2)$  Minpunkt vid  $(2, -6)$



9. Nedanstående uppgift är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften.

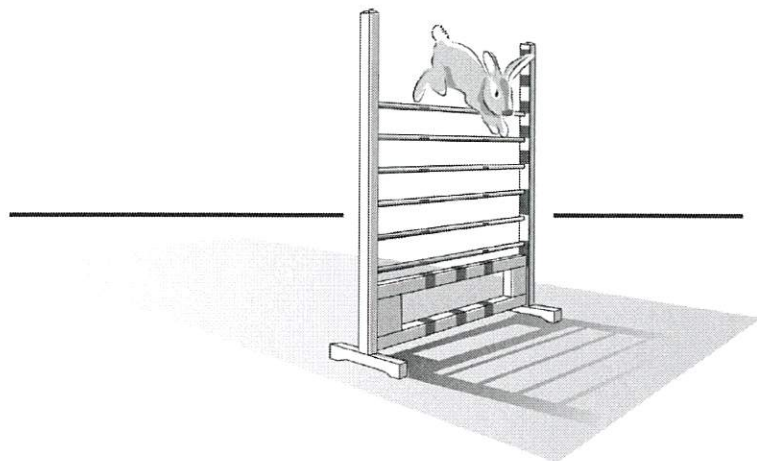
(2/0/0)

Kaninen Tösen från Danmark satte 1997 världsrekord i höjdhopp för kaniner. Enligt en modell gäller att Tösens höjd under hoppet ges av

$$h(x) = 4x - 4x^2$$

där  $h$  är höjden i meter över golvet och där  $x$  är avståndet i meter längs golvet från avstampet.

Beräkna med hjälp av derivata Tösens maximala hopp höjd.



1. Derivera

$$h' = 4 - 8x$$

2. Lös ekv  
 $h' = 0$

$$\begin{aligned} 4 - 8x &= 0 \\ 8x &= 4 \\ x &= 0,5 \end{aligned}$$

$-x^2 \Rightarrow$  Maxpunkt.  
(sur  
andragradare)

3. Beräkna  
höjden

$$\begin{aligned} h(0,5) &= 4 \cdot 0,5 - 4 \cdot 0,5^2 = \\ &= 2 - 4 \cdot 0,25 = 2 - 1 = 1 \text{ m} \end{aligned}$$

10. Bestäm en primitiv funktion  $F$  till  $f(x) = 6x^2 - 4x + 5$  sådan att  $F(1) = 3$

(2/0/0)

Alla primitiva funkt:

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{6x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + 5x + C \\ &= 2x^3 - 2x^2 + 5x + C \end{aligned}$$

$$F(1) = 3 \Rightarrow \text{"Byt ut } x \text{ mot } 1" \Rightarrow 2 \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 + C = 3$$

$$2 - 2 + 5 + C = 3$$

$$C = -2$$

$\Rightarrow$  Den sökta  
funktionen

$$F(x) = 2x^3 - 2x^2 + 5x - 2$$