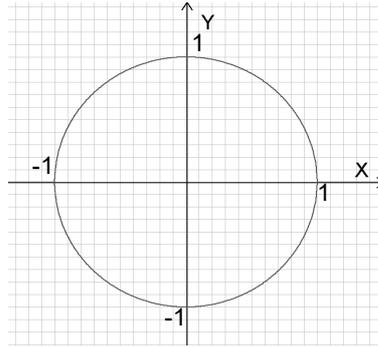
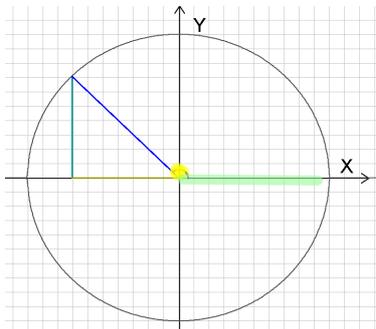


# Enhetscirkeln

Enhetscirkeln är en cirkel med medelpunkt i origo och radie 1.



Genom att skapa en rätvinklig triangel med ett hörn på cirkeln, ett hörn i origo och ett hörn på x-axeln fås definitioner för sin och cos:



För varje punkt på enhetscirkeln gäller:

$$\sin(\text{vinkel}) = y\text{-värdet}$$

$$\cos(\text{vinkel}) = x\text{-värdet}$$

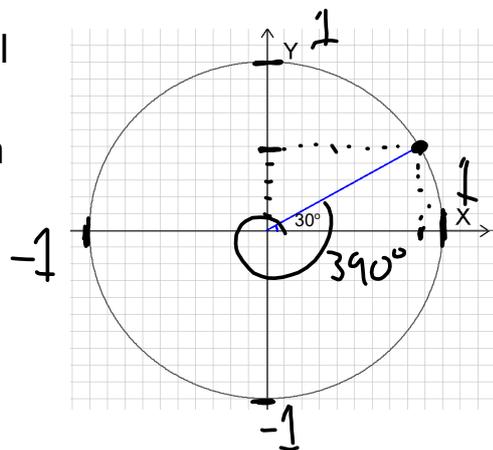
om **vinkeln** räknas från **positiva x-axeln**

Punkten kan även nås på flera sätt!

T.ex när vinklarna  $60^\circ$  och  $420^\circ$  samma punkt

Exempel: Figuren visar en enhetscirkel med vinkeln  $30^\circ$  markerad. Bestäm med hjälp av figuren ett ungefärligt värde på...

- $\sin(30^\circ)$
- $\cos(30^\circ)$
- $\sin(390^\circ)$



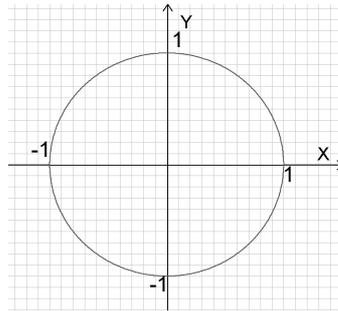
$$a) \sin(30^\circ) = \text{"y-koordinaten"} = 0,5 \text{ (5 streck)}$$

$$b) \cos(30^\circ) = \text{"x-koordinaten"} = 0,87 \text{ (ca 9 streck)}$$

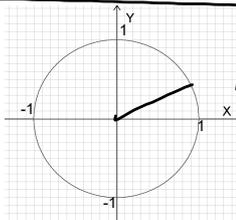
$$c) \sin(390^\circ) = \text{"Samma punkt som } 30^\circ \text{"} = \sin(30^\circ) = 0,5$$

**Uppgift 3:** Använd nedanstående enhetscirkel för att sortera  
 Enhetscirkeln nedanstående tal i storleksordning med det  
 minsta talet först

- sin (30°)
- cos (0°)
- sin (100°)
- cos (270°)
- sin (270°)

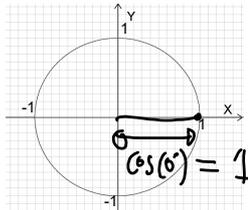


sin (30°) = "y-värdet  
 för 30°"



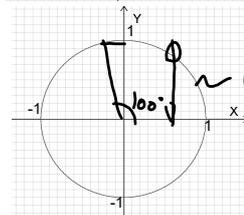
} sin (30) ≈ 0,5

cos (0°) = "x-värdet  
 för 0°"



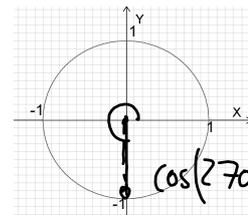
cos(0°) = 1

sin (100°) = "y-värdet  
 för 100°"



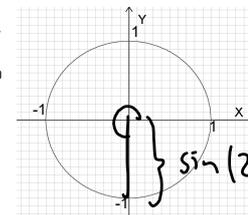
~ 0,95

cos (270°) = "x-värdet  
 för 270°"



cos(270°) = 0

sin (270°) = "y-värdet  
 för 270°"



sin(270°) = -1

Alltså:

Minst  Störst

- 1, 0, ~0,5, ~0,95, 1  
 sin(270°), cos(270°), sin(30°), sin(100°), cos(0°)

# Trigonometriska grundekvationer

En ekvation av typen

$$\sin(\ ) = \text{siffra}$$

$$\cos(\ ) = \text{siffra}$$

kallas en trigonometrisk grundekvation och har på ett varv lösningarna:

$\sin(\ ) = \text{siffra}$

$(\ )_1 = \sin^{-1}(\text{siffra})$

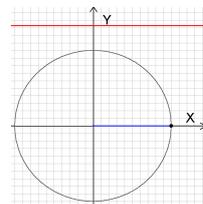
$(\ )_2 = 180^\circ - \sin^{-1}(\text{siffra})$

$\cos(\ ) = \text{siffra}$

$(\ )_1 = \cos^{-1}(\text{siffra})$

$(\ )_2 = -\cos^{-1}(\text{siffra})$

Om siffra är större än 1 eller mindre än -1 saknas lösning (linjen befinner sig utanför enhetscirkeln)



Söker man lösningar på andra varv än det första lägger man till en "+ n·360°"-term

Exempelvis har ekvationen  $\sin x = 0,5$  lösningarna

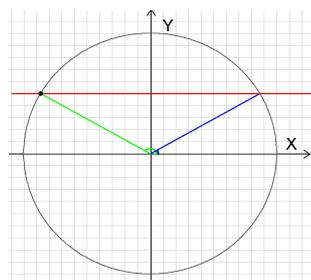
$$x_1 = 30^\circ$$

$$x_2 = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$$

...men ett varv senare finns ytterligare två vinklar som når samma punkter:

$$x_3 = 30^\circ + 360^\circ = 390^\circ$$

$$x_4 = 180^\circ - 30^\circ + 360^\circ = 510^\circ$$



**Uppgift 4:** Bestäm alla lösningar i intervallet  $0^\circ \leq v \leq 360^\circ$  till

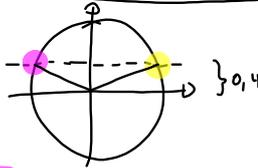
Trigonometriska  
grundekvationer

- a)  $\sin(x) = 0,4$   
 b)  $\cos(x) = -0,2$   
 c) Hitta alla lösningar till  
 ekvationerna i a) och b)

a)  $\sin(x) = 0,4$

$x_1 = \sin^{-1}(0,4) = 23,6^\circ$

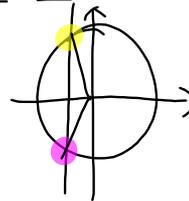
$x_2 = 180^\circ - x_1 = 180^\circ - 23,6^\circ = 156,4^\circ$



b)  $\cos(x) = -0,2$

$x_1 = \cos^{-1}(-0,2) \approx 101,5^\circ$

$x_2 = 360^\circ - x_1 = 360^\circ - 101,5^\circ = 258,5^\circ$



(svaret  $x_2 = -101,5^\circ$  går lika bra!)

- c) Alla lösningar innebär att utgå från svaren på 1 varv (dvs svaren i a) och b)) och lägga till  
 möjligheten till fler varv

$\sin(x) = 0,4$

$x_1 = 23,6 + n \cdot 360^\circ$

$x_2 = 156,4 + n \cdot 360^\circ$

Exempel på lösningar:  
 $(23,6^\circ, 383,6^\circ, -336,4^\circ)$   
 $(156,4^\circ, 516,4^\circ, -203,6^\circ)$

$\cos(x) = -0,2$

$x_1 = 101,5 + n \cdot 360^\circ$

$x_2 = -101,5 + n \cdot 360^\circ$

Exempel på lösningar:  
 $(-258,5^\circ, 101,5^\circ, 461,5^\circ)$   
 $(-461,5^\circ, -101,5^\circ, 258,5^\circ)$

Alltså: a)  $x_1 = 23,6^\circ$   
 $x_2 = 156,4^\circ$

b)  $x_1 = 101,5^\circ$   
 $x_2 = -101,5^\circ = 258,5^\circ$

- c) Summa som i a) och b)  
 men med  $+ n \cdot 360^\circ$   
 dvs:

$\sin(x) = 0,4$

$x_1 = 23,6^\circ + n \cdot 360^\circ$

$x_2 = 156,4^\circ + n \cdot 360^\circ$

$\cos(x) = -0,2$

$x_1 = 101,5^\circ + n \cdot 360^\circ$

$x_2 = -101,5^\circ + n \cdot 360^\circ$