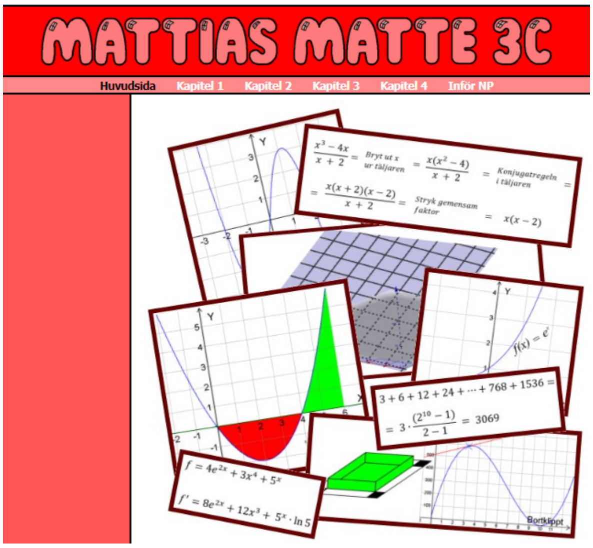


4.3 - Areasatsen

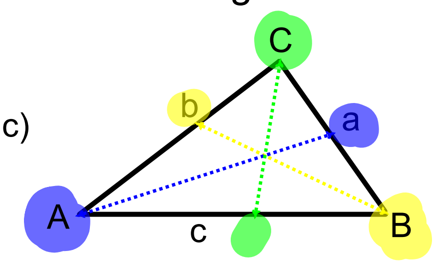
Triangelsatserna

Med hjälp av trigonometri i rätvinkliga trianglar kan man härleda tre formler som gäller i alla trianglar:

Areasatsen, Sinussatsen och Cosinussatsen

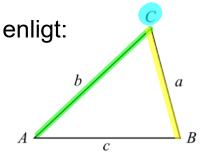
Dessa finns skrivna på formelbladet, utifrån en namngivningsstandard för hörn och sidor i en triangel:

Vinklarna kallas stora bokstäver (A, B, C),
och sidorna döps efter de små bokstäver (a, b, c)
som står emot vinkeln



Areasatsen

Formelbladet anger areasatsen enligt:



Areasatsen $T = \dfrac{ab\sin C}{2}$

(jämför med $\frac{\text{basen}\cdot\text{höjden}}{2}$)

Detta kan tolkas som Arean = $\dfrac{\text{sida 1}\cdot\text{sida 2}\cdot\sin(\text{vinkeln mellan})}{2}$

dvs: Arean kan bestämmas med två sidor och vinkeln mellan dessa.

Med digitala verktyg (Geogebra) - använd kommandot "Lös"

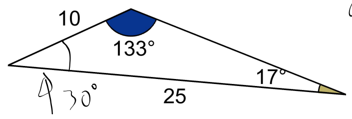
Utan digitala verktyg - använd tabellen på formelbladet.

Exakta värden

Vinkel v	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin v$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos v$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan v$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Ej def.	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Exempel 1: Bestäm arean av triangeln nedan

Utan digitala verktyg



Areasatsen kan inte användas direkt, men sista vinkeln kan bestämmas mha vinkelsumman:

Areasatsen: $\dfrac{10\cdot25\sin 30°}{2} =$ [FB: $\sin 30° = 0,5$]

$= \dfrac{10\cdot25\cdot0,5}{2} = \dfrac{125}{2} = 67,5$ ae

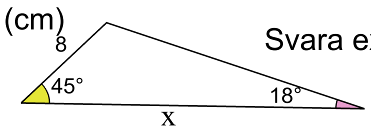
Exempel 2:

Utan digitala verktyg

Triangeln nedan har arean 65 cm^2

Bestäm längden av sidan x

Svara exakt!



Areasatsen:

$$\frac{8\cdot x\cdot\sin 45°}{2} = 65$$

[FB: $\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$]

$$\frac{8\cdot x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}{2} = 65$$

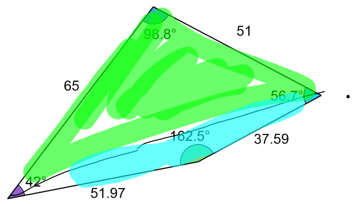
$$\frac{4x}{\sqrt{2}} = 65$$

$$x = \frac{65\sqrt{2}}{4}$$

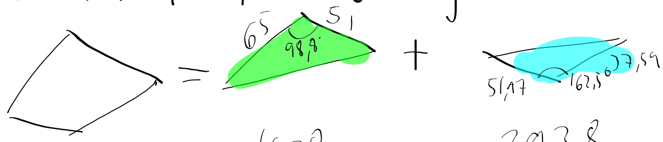
Exempel D1: Nedan visas en fyrhörning.

Med digitala verktyg

Bestäm fyrhörningens area.
Svara med en decimals noggrannhet



Dela in i två trianglar



$1931{,}79 \approx 1638 + 293{,}8$

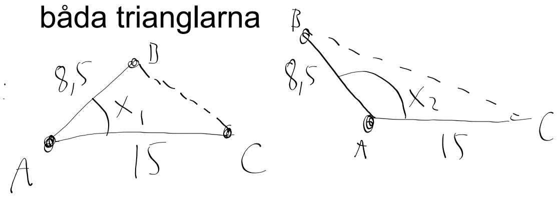
Exempel D2: Det finns två trianglar ABC, som uppfyller:

Med digitala verktyg

Sidan AB = 8,5 cm
Sidan AC = 15 cm
Arean = 52,7 cm^2

Bestäm vinkel A samt skissa de båda trianglarna

Skisser:



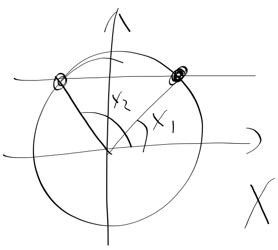
Areasatsen: $\frac{8{,}5 \cdot 15 \cdot \sin(x)}{2} = 52{,}7$

Lös $\Rightarrow$ $x_1 \approx 55{,}76^\circ$ $\quad x_2 \approx 124{,}24^\circ$

Kan också lösas "för hand"

$$\frac{8{,}5 \cdot 15 \cdot \sin(x)}{2} = 52{,}7$$

$$\sin(x) = \frac{52{,}7 \cdot 2}{8{,}5 \cdot 15}$$

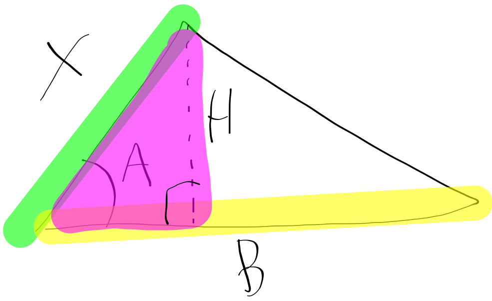


$$\sin(x) \approx 0{,}83$$

$$x_1 \approx \sin^{-1}(0{,}83) \approx 55{,}76^\circ$$

$$x_2 = 180 - x_1 \approx 124{,}24^\circ$$

Kort härledning:



$$\text{Arean} = \frac{B \cdot H}{2}$$

H fås via rätvinklig trig. i

$$\sin A = \frac{H}{X} \Rightarrow$$

$$H = \sin A \cdot X$$

$$\Rightarrow \text{Arean} = \frac{B \cdot H}{2} = \left[H = X \cdot \sin A \right]$$

$$= \frac{B \cdot X \cdot \sin A}{2}$$

dvs: $\dfrac{\text{2 sidor och sin vinkeln mellan}}{2}$

$\Rightarrow$ Areasatsen