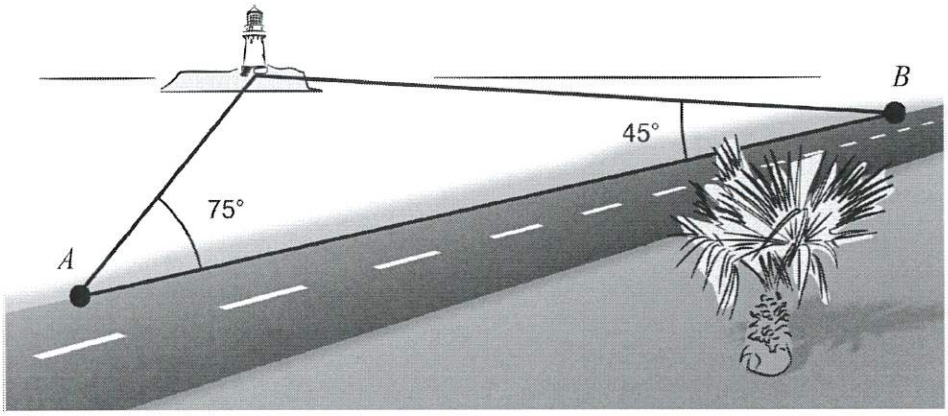
FACIT

Problemlösning med triangelsatserna

Samtliga uppgifter på detta uppgiftsblad är hämtade från gamla nationella prov. Många av uppgifterna går att lösa genom att konstruera skalenliga figurer i Geogebra, men försök att även lösa de med triangelsatserna.

Del 2 – Med digitalt hjälpmedel

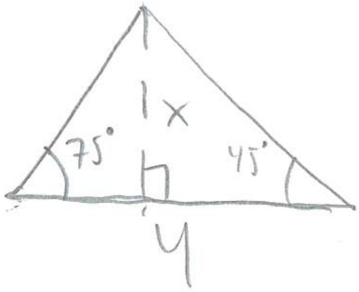
D1.



Längs en strand löper en rak 4,0 km lång vägsträcka *AB*. När Amir befinner sig i ena änden av sträckan (*A*) ser han snett framför sig en fyr i 75 graders vinkel mot vägen. Vid andra änden av sträckan (*B*) ser Amir fyren snett bakom sig i 45 graders vinkel mot vägen.

Beräkna det vinkelräta avståndet från vägen till fyren.

(3/0/0)



Börja med att bestämma sista vinkeln:

$180° - 75° - 45° = 60°$

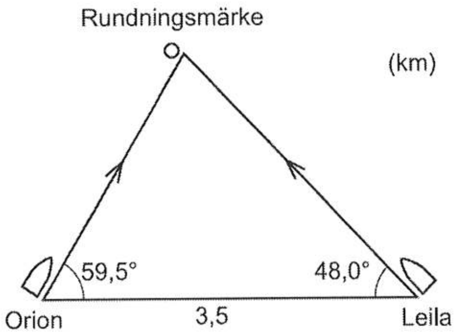
Sinussatsen $\Rightarrow$ $\dfrac{a}{\sin 45°} = \dfrac{4}{\sin 60°}$

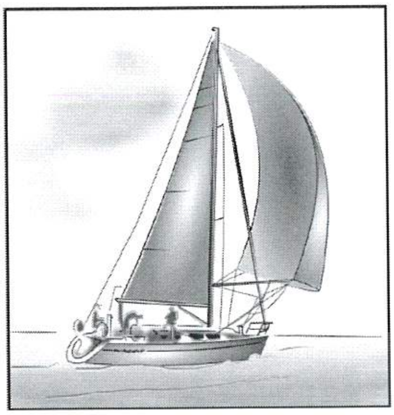
Lös $\Rightarrow$ $a \approx 3{,}26$

Nu fås x med rätvinklig trigonometri (el sinussatsen)

$x = 3{,}26 \cdot \sin 75° \approx 3{,}15$ km

D2. De två segelbåtarna "Orion" och "Leila" kappseglar. På grund av olika vägval har de vid ett visst ögonblick hamnat 3,5 km från varandra. Båtarna ska en bit längre bort passera ett rundningsmärke, se figur.





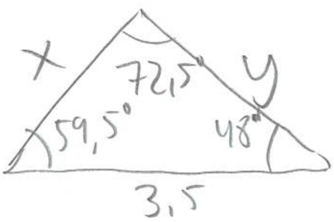
Vilken av segelbåtarna kommer först fram till rundningsmärket om Leilas hastighet är 4,0 knop och Orions 3,2 knop?
(1 knop = 1,852 km/h)

(3/0/0)

Strategi:
1) Sista vinkeln (vinkelsumman)
2) Återstående sidorna (sinussatsen)
3) Tiderna ("s = vt"-tänk)

1) Sista vinkeln = $180 - 59{,}5 - 48 = 72{,}5^\circ$

2)



Sinussatsen: $\dfrac{3{,}5}{\sin 72{,}5^\circ} = \dfrac{x}{\sin 48^\circ} = \dfrac{y}{\sin 59{,}5^\circ}$

Lös $\Rightarrow$ $x \approx 2{,}73$
$y \approx 3{,}16$

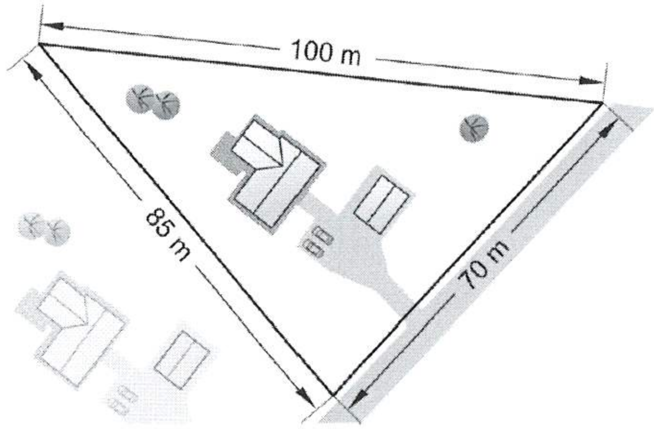
3) "$s = v \cdot t$"
$\Rightarrow t = \dfrac{s}{v}$

Orion: $v = 1{,}852 \cdot 3{,}2 = 5{,}93$ km/h
$s = x = 2{,}73$ km
$t = \dfrac{s}{v} = \dfrac{2{,}73}{5{,}93} = 0{,}46$ h

Leila: $v = 1{,}852 \cdot 4 = 7{,}408$ km/h
$s = 3{,}16$ km
$t = \dfrac{3{,}16}{7{,}408} = 0{,}43$ h

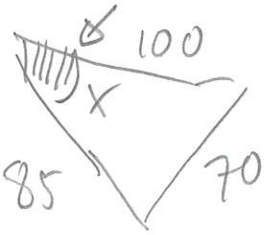
Leila kommer först
(med ca 0,034 h marginal)

D3. I figuren visas en tomt som har sidlängderna 100 m, 70 m och 85 m. (2/1/0)
Beräkna tomtens area.



Bestäm en vinkel med cos-satsen:

ex



: $70^2 = 100^2 + 85^2 - 2 \cdot 100 \cdot 85 \cdot \cos x$

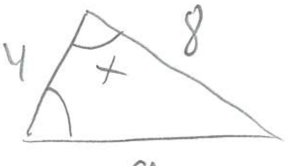
Lös $\Rightarrow$ $x \approx 43{,}53°$

Bestäm arean med areasatsen:

Arean $= \dfrac{100 \cdot 85 \cdot \sin(43{,}53°)}{2} \approx 2900\ m^2$

D4. I en triangel är sidorna 4, 8 respektive 9 längdenheter.
Undersök om triangeln är trubbvinklig. (0/2/0)

Skiss:



Strategi: Den största vinkeln i triangeln finns mot längsta sidan

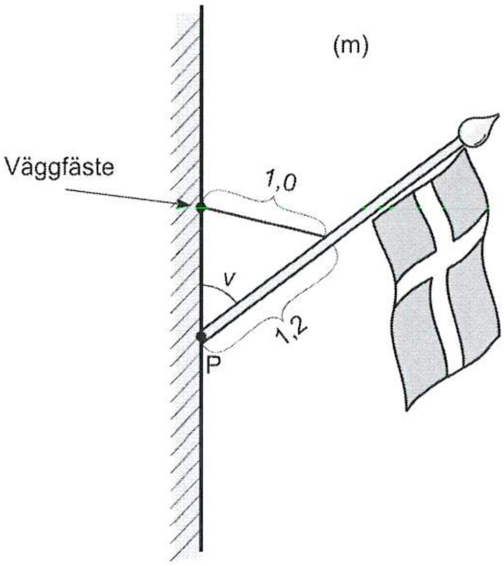
$\Rightarrow$ Trubbiga vinkeln står isf mot sidan med längden 9

Cosinussatsen: $9^2 = 8^2 + 4^2 - 2 \cdot 8 \cdot 4 \cdot \cos x$

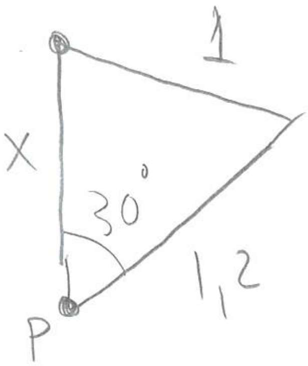
Lös $\Rightarrow$ $x = 90{,}9$

Svar: Ja, den är trubbvinklig (om än väldigt knappt)

D5.



Över dörren till en butik sitter en flaggstång. Den hålls upp av ett stag med längden 1,0 m. Butiksägaren ska flytta stagets väggfäste så att flaggstången bildar vinkeln $v = 30°$ med väggen. Väggfästet placeras rakt ovanför punkten P. Bestäm avståndet mellan P och väggfästets nya läge. (2/1/0)



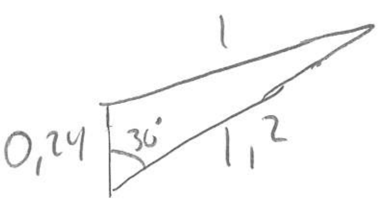
Cosinussatsen:

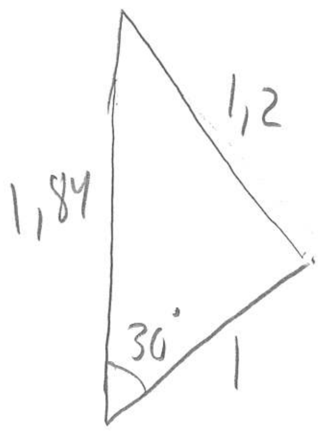
$$1^2 = 1{,}2^2 + x^2 - 2 \cdot 1{,}2 \cdot x \cdot \cos 30°$$

Lös $\Rightarrow$ $x_1 \approx 0{,}24$ m

$x_2 \approx 1{,}84$ m

Notera att båda dessa fall är giltiga:

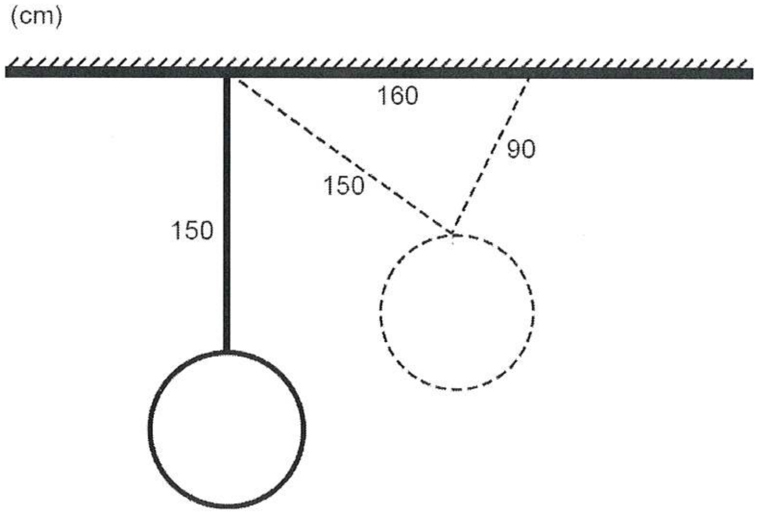




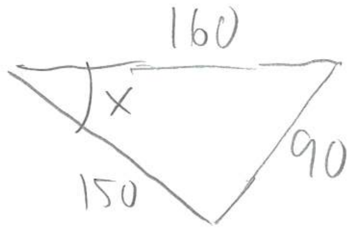
D6. Stina och Nisse har en lampa över soffbordet. Ibland vill de höja lampan så att den inte skymmer sikten. Lampan hänger i taket i en lina som är 150 cm. På avståndet 160 cm från takfästet har de en krok och därifrån fäster de en 90 cm lång lina till lampan.

Hur mycket högre kommer lampan att hänga när man fäster den på det sättet? (1/2/0)

(Mätning i figur godtas ej)



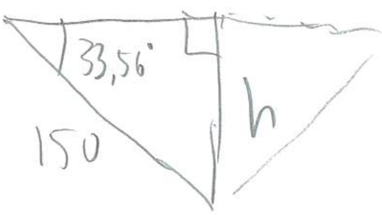
Cosinussatsen:



$$90^2 = 160^2 + 150^2 - 2 \cdot 150 \cdot 160 \cdot \cos(x)$$

$$\text{Lös} \Rightarrow x = 33{,}56^\circ$$

Med x känt kan höjden bestämmas på flera sätt, ex: rätvinklig trigonometri eller sinussatsen

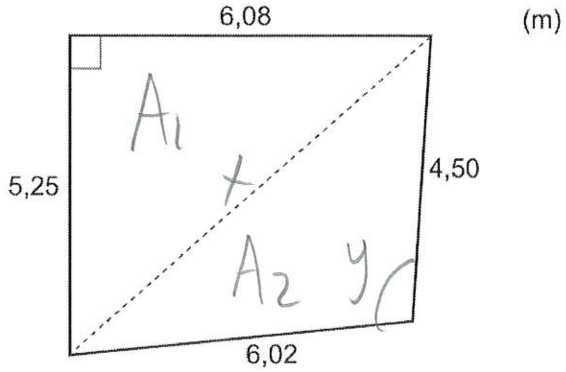


$$h = 150 \cdot \sin 33{,}56^\circ$$
$$= 82{,}92 \text{ cm}$$

Den nya höjden är $h = 82{,}92$ cm.

Då är höjdskillnaden: $150 - 82{,}92 = 67{,}1$ cm

D7. Daniel och Linda tittar på en lägenhet. Enligt uppgift är vardagsrummet 31,2 m^2. De vill kontrollera om detta stämmer och mäter väggarna och ritar en skiss över rummet. De vet att ett hörn i rummet är rätvinkligt. Så här ser deras skiss ut.



Vilken area har vardagsrummet enligt Daniels och Lindas skiss? (1/2/0)

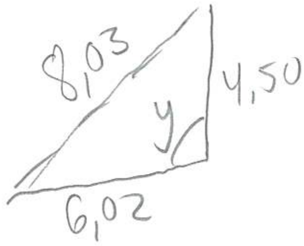
Strategi: 1) Beräkna den gemensamma sidan, x med Pyth. sats (eller cosinussatsen)

2) Bestäm vinkel y med cos-satsen

3) Areasatsen på resp triangel, och summera dessa svar.

1) Pyth. sats: $6{,}08^2 + 5{,}25^2 = x^2$ Lös $\Rightarrow x = 8{,}03$

2) Cosinussatsen: $8{,}03^2 = 4{,}50^2 + 6{,}02^2 - 2 \cdot 4{,}50 \cdot 6{,}02 \cdot \cos(y)$



Lös $\Rightarrow y \approx 97{,}5°$

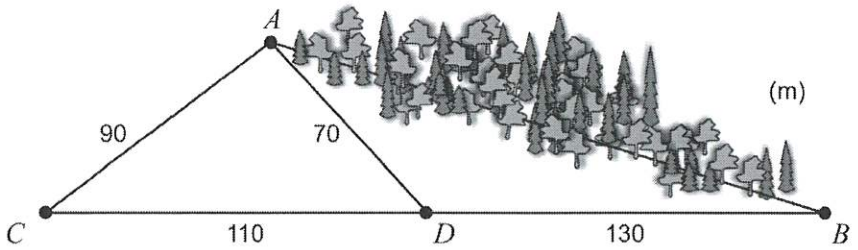
3) Areasatsen: $A_1 \approx \frac{5{,}25 \cdot 6{,}08 \cdot \sin 90°}{2} \approx 15{,}96 \text{ m}^2$

$A_2 \approx \frac{6{,}02 \cdot 4{,}50 \cdot \sin 97{,}5°}{2} \approx 13{,}43 \text{ m}^2$

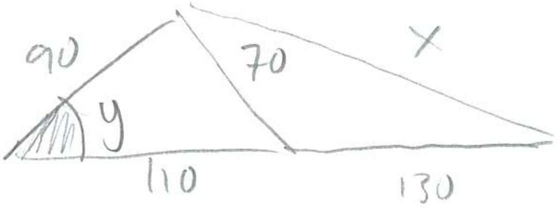
Total area: $A_1 + A_2 = 29{,}4 \text{ m}^2$

D8. Anton och Anya vill veta avståndet mellan två platser, A och B, i skogen. Mellan dessa platser är det besvärligt att ta sig fram. Det är därför svårt för dem att mäta upp avståndet direkt.

Istället väljer de ut två platser C och D som tillsammans med B ligger längs samma linje. Sedan mäter Anton och Anya upp sträckorna AC, AD, BD och CD, se figur. Figuren är inte skalenlig.



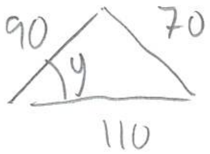
Beräkna avståndet mellan A och B. (0/3/0)



Strategi: 1) Bestäm vinkel y med cosinussatsen

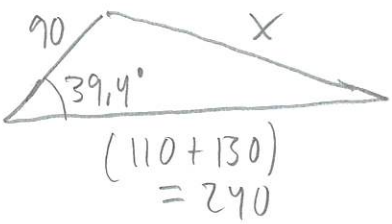
2) Bestäm x med cosinussatsen

1) Cosinussatsen: $70^2 = 110^2 + 90^2 - 2 \cdot 110 \cdot 90 \cdot \cos(y)$



Lös $\Rightarrow y \approx 39{,}4°$

2) Cosinussatsen: $x^2 = 90^2 + 240^2 - 2 \cdot 90 \cdot 240 \cdot \cos(39{,}4°)$

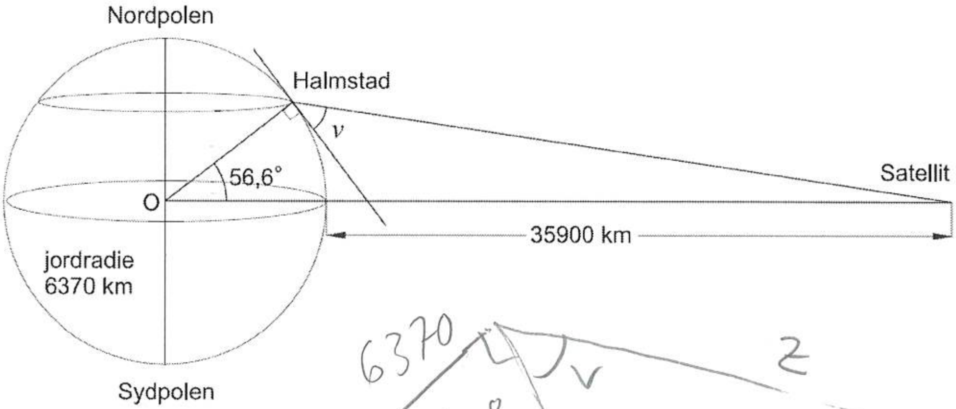


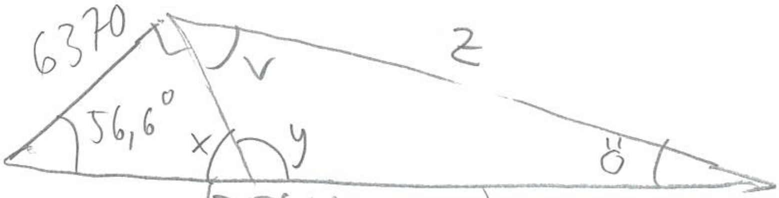
Lös $\Rightarrow x \approx 179{,}8$ m

D9. Stina som bor i Halmstad har köpt en parabolantenn. Hon ska sätta upp den på villataket. Hur ska hon rikta parabolantennen för att bäst ta emot TV-signaler från en satellit? Kommunikationssatelliter finns "parkerade" i söder på en höjd av 35900 km rakt ovanför ekvatorn enligt figuren nedan. Halmstad ligger på latituden 56,6° nordlig bredd och jorden kan antas vara en sfär med radien 6370 km.

Vilken vinkel v över horisonten i söder ska parabolantennen ställas in i för att bäst ta emot signalen?

(0/4/0)





$(35900+6370)$
$= 42270$

Strategi: 1. Bestäm x och y (vinkelsumman)

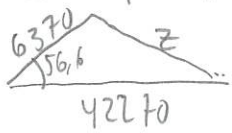
2. Bestäm sidan z (cos. satsen)

3. Bestäm vinkel ö (sin-satsen)

4. Bestäm vinkel v (vinkelsumman)

1.) $x = 180 - 56{,}6 - 90 = 33{,}4^\circ$
$y = 180 - x = 146{,}6^\circ$

2) $z^2 = 42270^2 + 6370^2 - 2 \cdot 42270 \cdot 6370 \cdot \cos(56{,}6^\circ)$



Lös $\Rightarrow z \approx 39126$

3) $\dfrac{\sin 56{,}6^\circ}{39126} = \dfrac{\sin ö}{6370}$

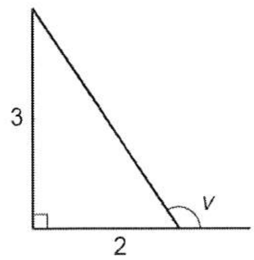
Lös $\Rightarrow ö \approx 7{,}81^\circ$

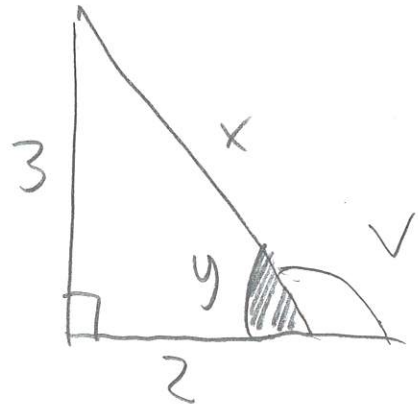
4)

$7{,}81^\circ + 56{,}6^\circ + v + 90^\circ = 180^\circ$

$v \approx 25{,}6^\circ$

D10. Vinkeln v är markerad i figuren. Bestäm $\cos v$ **exakt**. (0/1/1)





Strategi: 1. Bestäm x (Pyth. sats)

2. Teckna cos (y)

3. Utnyttja enhetscirkeln för sambandet mellan cos (y) och cos (v)

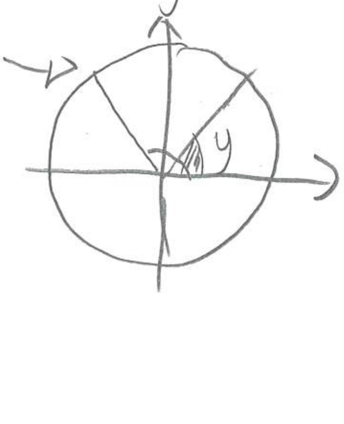
1. $2^2 + 3^2 = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{13}$

2.

$\Rightarrow \cos(y) = \frac{2}{\sqrt{13}}$

3. $v + y = 180° \Rightarrow v = 180° - y \Rightarrow \cos(v) = \cos(180° - y)$

(180-y)



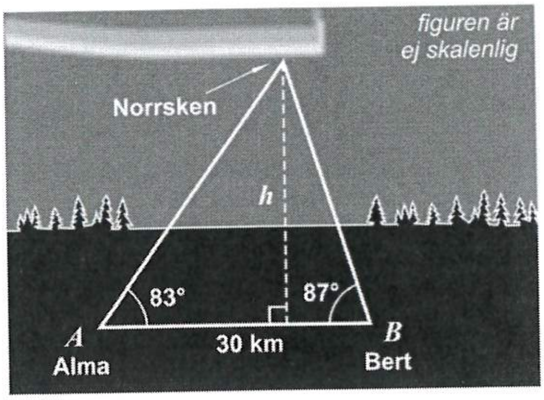
Pga symmetrin gäller att

$\cos(180° - y) = -\cos(y) = -\frac{2}{\sqrt{13}}$

$\Rightarrow \cos(v) = -\frac{2}{\sqrt{13}}$

D11. En kväll ser Alma och Bert ett norrsken och mäter samtidigt den höjdvinkel som de observerar norrskenet på. Vinklarna de mäter är $A = 83°$ i nordlig riktning respektive $B = 87°$ i sydlig riktning, se figur nedan. På vilken höjd, h, ligger norrskenet ?

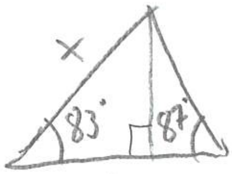
a)



b) Alma och Bert bestämmer sig för att ägna sitt kommande projektarbete åt norrsken. De vill hitta en formel som direkt ger höjden om man matar in uppmätta värden på vinklarna A och B. Härled en lämplig formel i förenklad form.

c) Gäller formeln även om norrskenet befinner sig norr om Bert så att vinkeln B är trubbig? Motivera ditt svar. (1/3/2)

a)



1) Bestäm tredje vinkeln: $180 - 83 - 87 = 10°$

2) Sinussatsen: $\frac{\sin 10°}{30} = \frac{\sin 87°}{x}$

Lös $\Rightarrow x \approx 172{,}53$ km

3) $h = x \cdot \sin 83° = 172{,}53 \cdot \sin 83 = 171{,}24$ km

b) Samma strategi men generellt:

1) Tredje vinkeln: $180 - A - B$

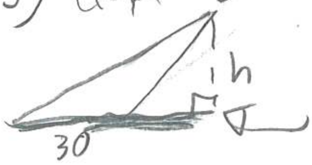
2) sinussatsen: $\frac{30}{\sin(180-A-B)} = \frac{x}{\sin B}$

$\sin(180-A-B) = \sin(A+B)$ enl. enhetscirkeln

$x = \frac{30 \cdot \sin B}{\sin(180-A-B)} = \frac{30 \sin B}{\sin(A+B)}$

3) $h = x \cdot \sin A = \frac{30 \cdot \sin B \cdot \sin A}{\sin(A+B)}$

c) Nej, formeln gäller inte för trubbiga vinklar på B pga steg 3) då basen förväntas vara 30



större än 30!