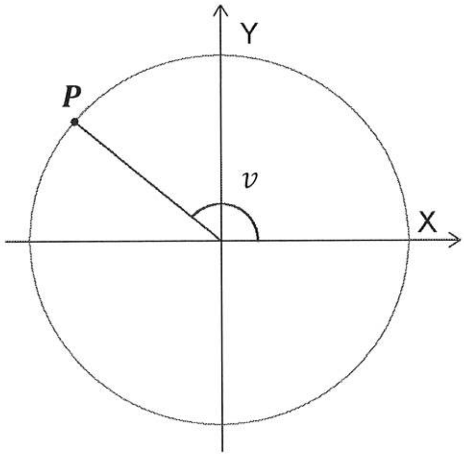
FACIT

Kapitel 4 - Repetition

Del 1a – Utan digitalt hjälpmedel – Endast svar

1. Figuren visar en enhetscirkel med en punkt, $\boldsymbol{P}$, och en vinkel, v, markerad.



Punkten **P** har koordinaterna $(-0{,}77\ ;\ 0{,}64)$

a) Bestäm värdet av $\sin(v)$ = "y-koord"

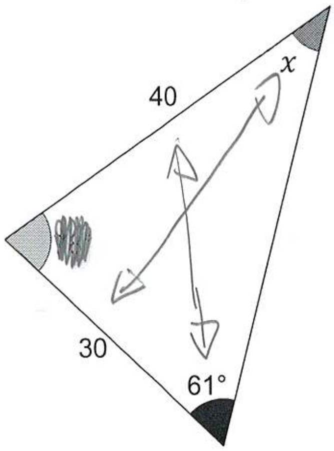
Svar: 0,64 (1/0/0)

b) Bestäm värdet av $\cos(v) + \cos(60°)$ Formelbladets tabell: $\cos 60° = 0{,}5$

x-koord. $= -0{,}77$

Svar: $-0{,}27$ (1/0/0)

2. Figuren visar en triangel med sidorna 40 och 30.



Sinussatsen:

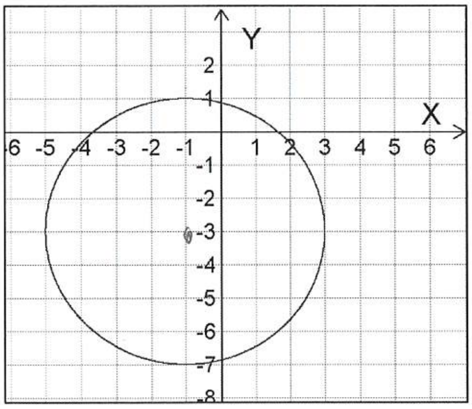
40 och 61°

30 och x

Ställ upp en ekvation med vilken det går att bestämma vinkel x

Svar: $\frac{\sin x}{30} = \frac{\sin 61°}{40}$ (1/0/0)

3. Figuren visar en cirkel i ett koordinatsystem.



Mittpunkt: $(-1, -3)$

Radie $= 4$ $\Rightarrow$ $a = -1$

$b = -3$

FB:

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

Ange cirkelns ekvation.

Svar: $(x+1)^2 + (y+3)^2 = 16$ (2/0/0)

4. Bestäm det exakta värdet av $\cancel{\cos(90°)}$ $\cos(180°)$ $\cdot \sin(60°) + \cos(60°) \cdot \sin(30°)$

FB: $\cos(180°) = -1$

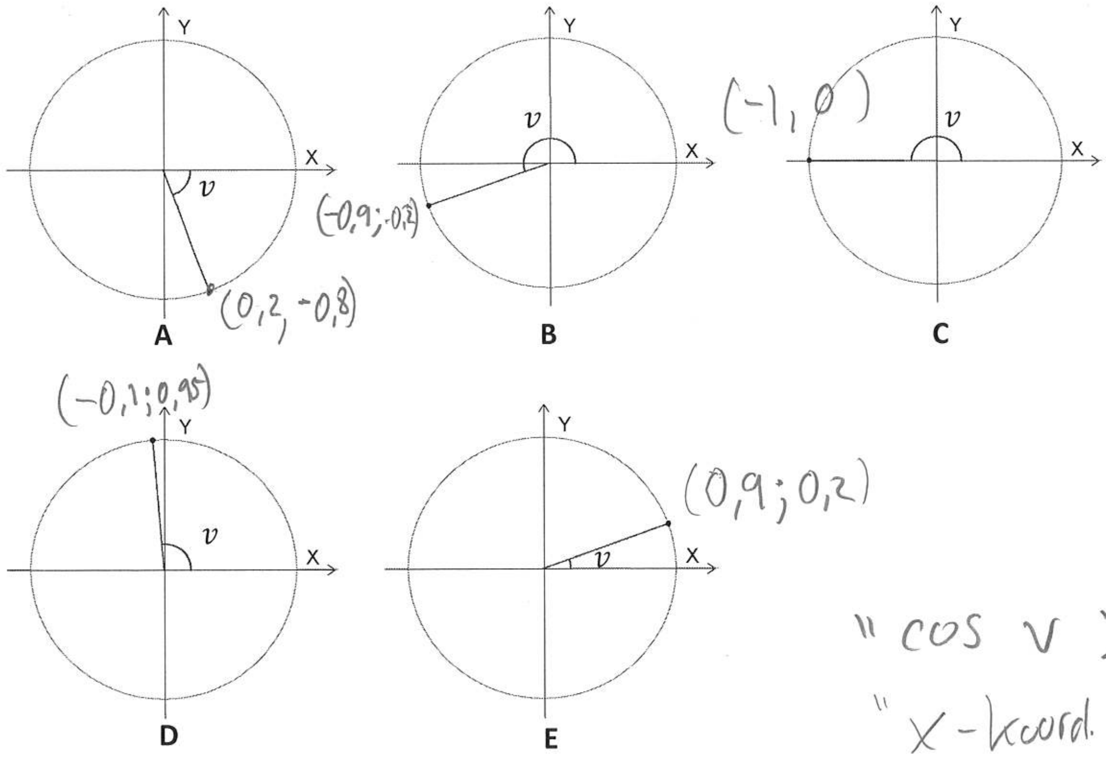
$\sin(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos(60°) = \frac{1}{2}$

$\sin(30°) = \frac{1}{2}$

Svar: $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1-2\sqrt{3}}{4}$ (0/1/0)

5. Figuren visar fem enhetscirklar kallade **A – E.**



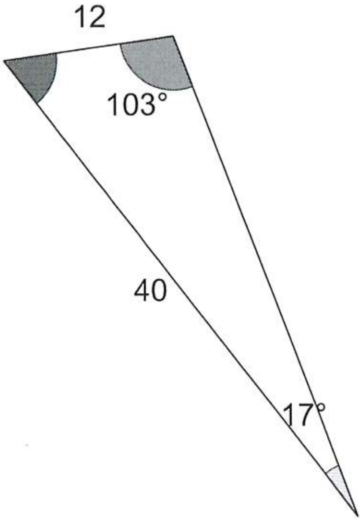
"cos v > sin v"

"x-koord. större än y-koord"

För vilket/vilka av alternativen gäller att $\cos(v) > \sin(v)$?

Svar: A, E (0/1/0)

6. Figuren visar en triangel.



Sista vinkeln:
$180 - 17 - 103 = 60°$

Areasatsen:
$\frac{12 \cdot 40 \cdot \sin 60°}{2} =$

$\left[FB: \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$

Bestäm triangelns area.
Svara exakt!

Svar: $120\sqrt{3}$ (0/1/0)

7. En cirkel har ekvationen $\left(x - \sqrt{5}\right)^2 + \left(y + \sqrt{3}\right)^2 = 6$

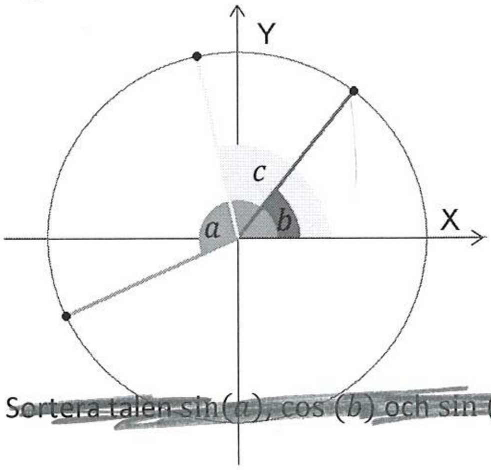
Beskriver r^2
$\Rightarrow r = \sqrt{6}$

Beskriver mittpunkten

Ange cirkelns *omkrets*.

Svar: $2 \cdot \pi \cdot \sqrt{6}$ (0/1/0)

8. Figuren visar en enhetscirkel med de tre vinklarna a, b och c markerade.



$\sin c =$ y-värdet hos $c \approx 0{,}95$
$\sin a =$ y-värdet hos $a \approx -0{,}3$
$\cos(a) =$ x-värdet hos $a \approx -0{,}9$
$\cos(b) =$ x-värdet hos $b \approx 0{,}5$

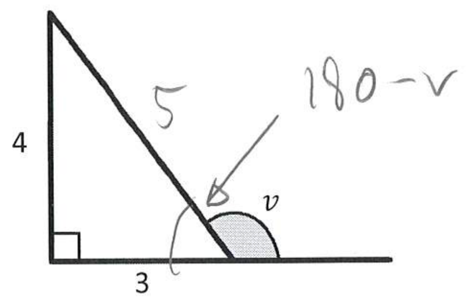
~~Sortera talen sin(a), cos (b) och sin (c)~~

~~Svar: (0/1/0)~~

Sortera de fyra talen sin (c), sin(a), cos (a), cos (b)
i storleksordning med det ***minsta*** först.

Svar: cos(a), sin(a), cos(b), sin(c) (0/1/0)

9. Figuren visar en rätvinklig triangel med en yttervinkel v



Rätvinklig triag. gen vinkeln i triangeln efter att först bestämt hypotenusen

$3^2+4^2=x^2 \Rightarrow x=\sqrt{25}=5$

$\sin(180-v)=\frac{4}{5} \Rightarrow \sin(v)=\frac{4}{5}$

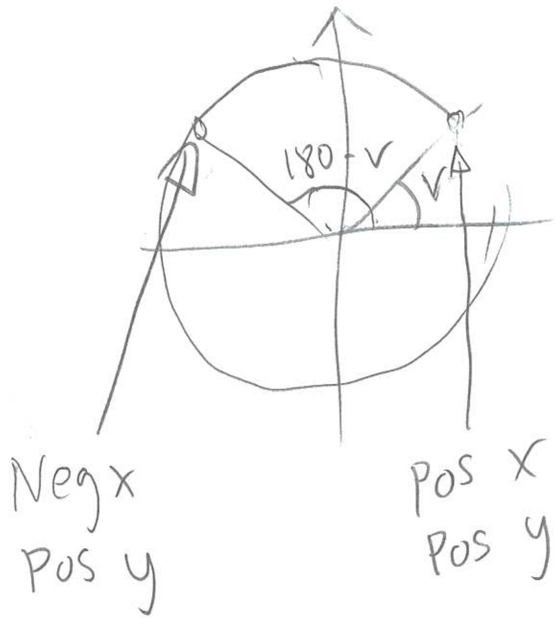
a) Bestäm värdet av $sin\ (v)$.

Svar: $\frac{4}{5}$ (0/1/0)

b) Bestäm värdet av $cos\ (v)$.

Svar: $-\frac{3}{5}$ (0/0/1)

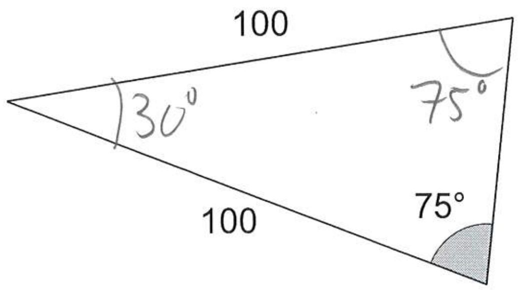
(180 -v) och (v) har samma sinus men olika tecken på cos.



Oavsett var v är kommer alltid (180-v) att motsvara speglingen på andra siden y-axeln

Del 1b – Utan digitalt hjälpmedel – Fullständiga uträkningar krävs

10. Figuren visas en triangel.



Bestäm triangelns area. (3/0/0)

Triangeln är likbent ⇒ Basvinklarna lika

⇒ Andra basvinkeln är också 75°

⇒ Toppvinkeln fås med vinkelsumman

$180° - 75° - 75° = 30°$

Med den känd kan areasatsen användas:

$\frac{100 \cdot 100 \cdot \sin 30°}{2} = \left[\begin{matrix} FB \\ \sin 30° = 0{,}5 \end{matrix} \right] = 2500$ ae

11. För en viss cirkel gäller att dess ekvation är $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$

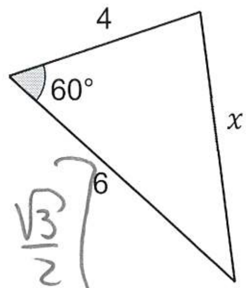
Avgör om punkten (5, 1) ligger på, innanför eller utanför cirkeln. (2/0/0)

Stoppa in (5,1) i vänsterled, dvs $x=5$ och $y=1$, och jmf svaret med den givna 25:an.

$(5-2)^2 + (3+1)^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$

⇒ Samma svar ⇒ Punkten är på cirkeln

12. Figuren visar en triangel med vinklar och sidor angivna.



a) Bestäm triangelns area. (1/1/0)

Svara exakt!

Areasatsen: $\frac{4 \cdot 6 \cdot \sin(60^\circ)}{2} = \left[\begin{array}{l}\text{FB:} \\ \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right]$

$= 2 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ ae

b) Bestäm sidan x. (1/1/0)

Svara exakt!

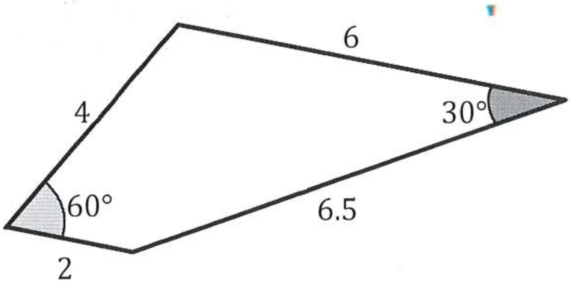
Cosinussatsen: $x^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cos 60^\circ$

FB: $\cos 60^\circ = 0{,}5$ $\quad x^2 = 16 + 36 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 0{,}5$

$= 52 - 24 = 28$

$\Rightarrow x = \sqrt{28}$

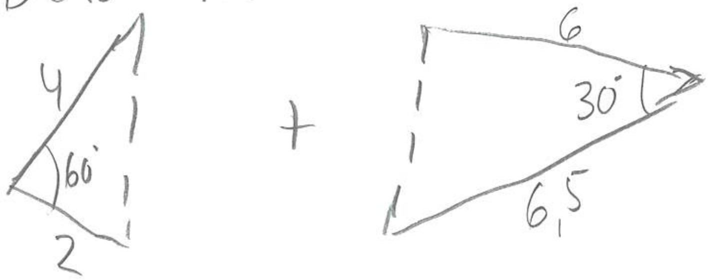
13. Nedan visas en fyrhörning.



(cm)

Bestäm fyrhörningens area. *Svara exakt!* (1/2/0)

Dela in i två trianglar:



Areasatsen på varje triangel:

$\frac{4 \cdot 2 \cdot \sin(60^\circ)}{2} + \frac{6 \cdot 6{,}5 \cdot \sin(30^\circ)}{2} = \left[\begin{array}{l}\text{FB:} \\ \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin 30^\circ = \frac{1}{2}\end{array}\right]$

$= 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 3 \cdot 6{,}5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{4\sqrt{3} + 19{,}5}{2}$

14. En triangel ABC beskrivs enligt nedanstående beskrivning.

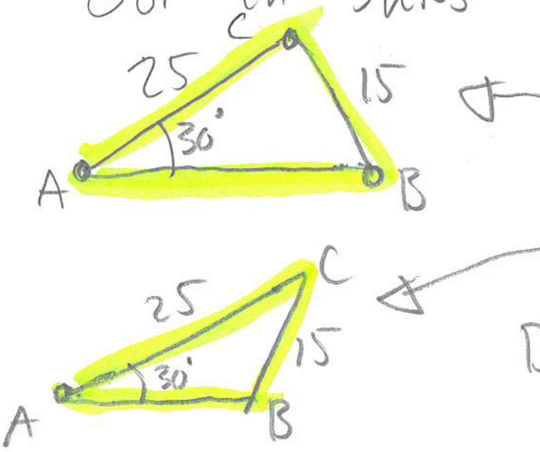
Vinkel A = 30°

Sida AB = 25 cm

Sida BC = 15 cm

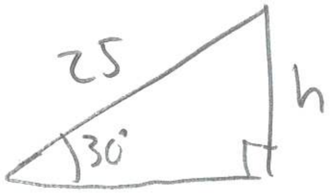
Undersök om triangeln kan se ut på mer än ett sätt. (0/2/0)

Gör en skiss av den givna infon:



Eftersom sidan BC är kortare än 25 finns möjligheten till 2 trianglar

Dock behöver man kolla så att 15 räcker till (dvs att den inte är för kort)

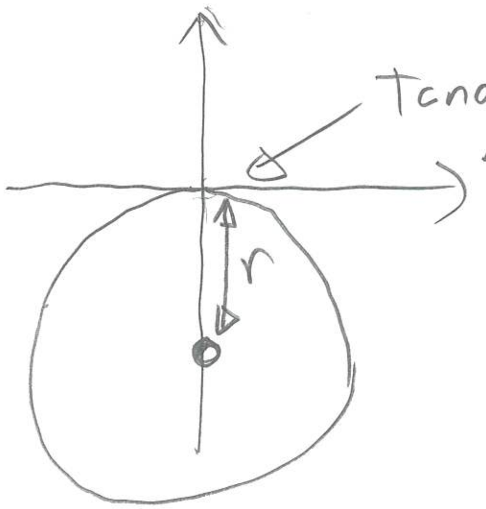


$h = 25 \cdot \sin 30° = \left[\begin{array}{l} FB \\ \sin 30° = 0{,}5 \end{array}\right]$

$= 12{,}5 \quad BC > 12{,}5$

$\Rightarrow$ 2 trianglar

15. En cirkel har sin mittpunkt på y-axeln och tangerar x-axeln på den negativa sidan
Cirkelns area är 12π.
Bestäm cirkelns ekvation. (0/1/1)



Tangerar x-axeln på neg. sidan

$A = 12\pi \Rightarrow \pi \cdot r^2 = 12\pi$

$r^2 = 12$

$r = \sqrt{12}$

$\Rightarrow$ mittpunkten har koord $(0, -\sqrt{12})$

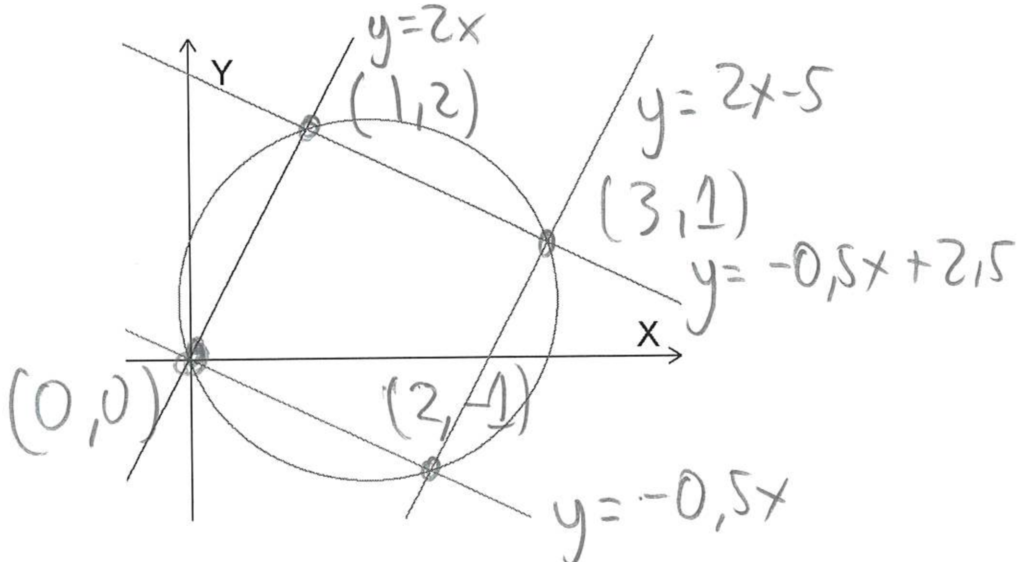
Ekvationen: $x^2 + (y + \sqrt{12})^2 = 12$

16. Figuren visar fyra stycken räta linjer inritade i ett koordinatsystem.

$y = 2x$ $\qquad$ $y = -0{,}5x$

$y = 2x - 5$ $\qquad$ $y = -0{,}5x + 2{,}5$

De fyra skärningspunkterna bildar hörn i en kvadrat.



Dessa fyra hörn ligger också på en cirkel.
Bestäm denna cirkelns ekvation. (0/1/2)

Ta reda på skärningspunkterna för linjerna

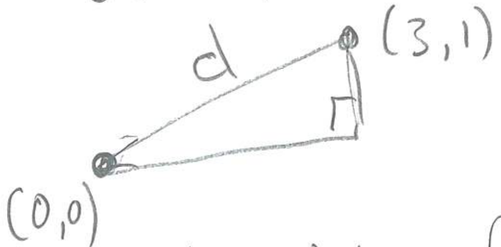
"y=y" $\Rightarrow$ $2x = -0{,}5x \Rightarrow x=0 \quad y=0$

$2x = -0{,}5x+2{,}5 \Rightarrow x=1 \quad y=2$

$2x-5 = -0{,}5x+2{,}5 \Rightarrow x=3 \quad y=1$

$2x-5 = -0{,}5x \Rightarrow x=2 \quad y=-1$

Diametern fås som diagonalen i kvadraten.



$\Rightarrow d=\sqrt{10} \Rightarrow 2\cdot r = \sqrt{10}$

$r = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$

Mittpunkten fås som halva

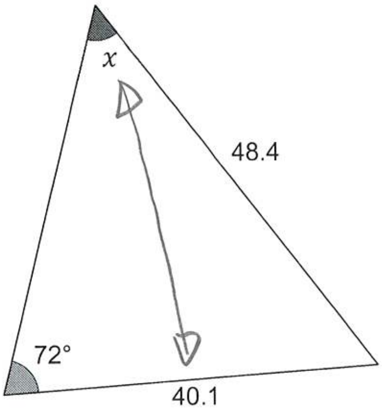
skillnaden i y-led och halva skillnaden i x-led:

dvs $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}\right) = (1{,}5 ; 0{,}5)$ $\qquad$ $r^2 = \left(\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 = \dfrac{10}{4} = 2{,}5$

Ekvationen blir: $(x-1{,}5)^2 + (y-0{,}5)^2 = 2{,}5$

Del 2 – Med digitalt hjälpmedel – Fullständiga uträkningar krävs

D1. Figuren nedan visar en triangel.



Bestäm värdet av vinkel x. (2/0/0)

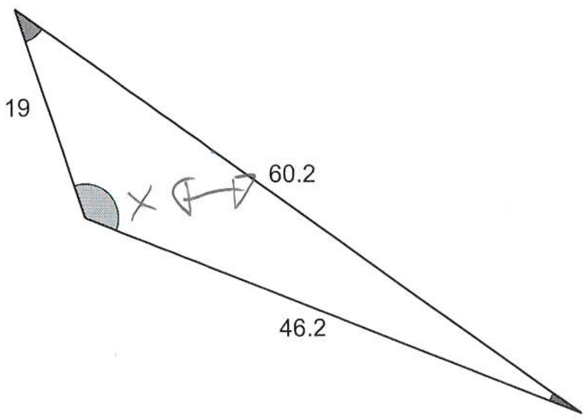
Svara med en decimals noggrannhet!

Sinussatsen: $\frac{\sin x}{40,1} = \frac{\sin 72^\circ}{48,4}$

Lös $\Rightarrow$ $x = 52^\circ$

$(x = 128^\circ \leftarrow$ Stämmer inte med bilden)

D2. Figuren visar en triangel.



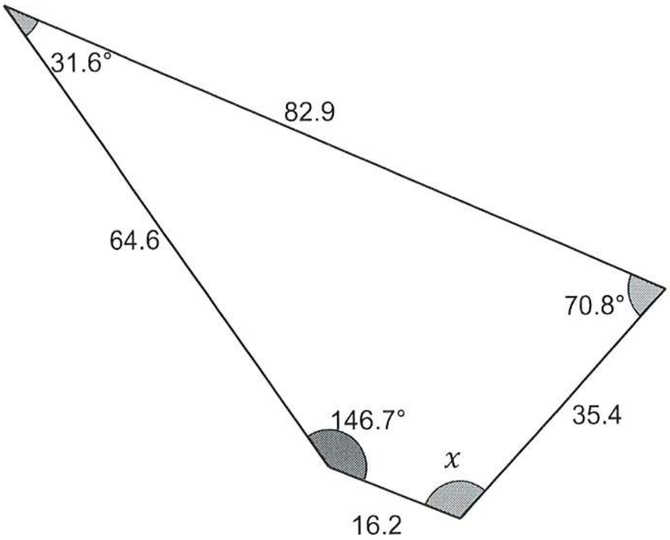
Bestäm triangelns största vinkel. (2/0/0)

Största vinkeln står mot längsta sidan.

Cosinussatsen: $60,2^2 = 46,2^2 + 19^2 - 2 \cdot 46,2 \cdot 19 \cdot \cos(x)$

Lös $\Rightarrow$ $x \approx 130^\circ$

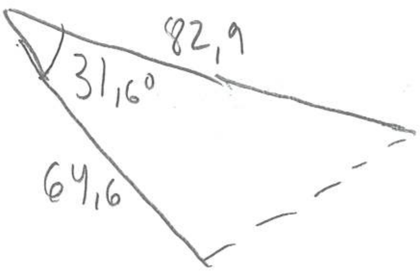
D3. Figuren nedan visar en fyrhörning med arean 1670 m^2



(m)

Bestäm vinkel x (2/1/0)

Dela in i två trianglar:



+

Areasatsen på varje triangel.

$$\frac{64{,}6\cdot 82{,}9\cdot \sin(31{,}6^\circ)}{2} + \frac{16{,}2\cdot 35{,}4\cdot \sin(x)}{2} = 1670$$

$$1403 + 286{,}74\cdot \sin(x) = 1670$$

Lös $\Rightarrow$ $x \approx 111{,}4^\circ$

($x \approx 68{,}6^\circ$ ← stämmer ej med bilden)

D4. Visa med tre valfria exempel på x att det stämmer att $(\sin(x))^2 + (\cos(x))^2 = 1$ (2/0/0)

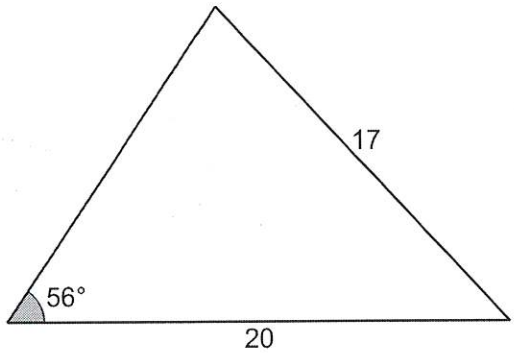
Ex 1: $x = 30° \Rightarrow \sin x = 0{,}5$, $\cos x \approx 0{,}866$ $\Rightarrow 0{,}5^2 + 0{,}866^2 = 1$

Ex 2: $x = 70° \Rightarrow \sin x \approx 0{,}94$, $\cos x \approx 0{,}342$ $\Rightarrow 0{,}94^2 + 0{,}342^2 = 1$

Ex 3: $x = 240 \Rightarrow \sin x \approx -0{,}866$, $\cos x = -0{,}5$ $\Rightarrow (-0{,}866)^2 + (-0{,}5)^2 = 1$

VSV.

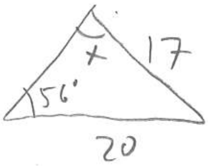
D5. Figuren visar en triangel med sidorna 17 och 20.



Bestäm triangelns tredje sida. (1/1/0)

Kan lösas med både sinussatsen och cosinussatsen

→ sinussatsen



$$\frac{\sin x}{20} = \frac{\sin 56°}{17}$$

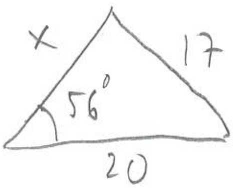
Lös $\Rightarrow x \approx 77{,}25°$

Sista vinkeln $= 180 - 56° - 77{,}25 = 46{,}75°$

$$\frac{y}{\sin(46{,}75°)} = \frac{17}{\sin(56°)}$$

Lös $\Rightarrow y \approx 14{,}94$

→ cosinussatsen

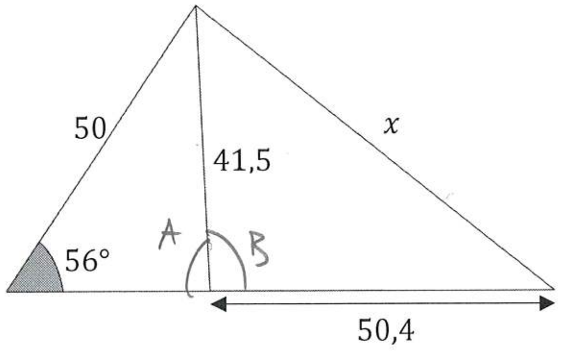


$$17^2 = 20^2 + x^2 - 2 \cdot 20 \cdot x \cdot \cos 56°$$

Lös $\Rightarrow x \approx 14{,}94$

För kort. → $(x \approx 7{,}43)$

D6. Figuren nedan visar två trianglar som satts ihop till en större triangel.



Bestäm sträckan x (2/1/0)

Strategi: 1. Bestäm vinkel A med sinussatsen
2. Bestäm vinkel B gnm 180 – A
3. Bestäm x med cosinussatsen

1. $\frac{50}{\sin A} = \frac{41{,}5}{\sin 56^\circ} \Rightarrow$ Lös $\Rightarrow A \approx 87{,}24^\circ$

2. $B = 180 - A = 180 - 87{,}24 = 92{,}76^\circ$

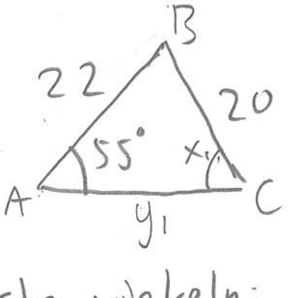
3. $x^2 = 41{,}5^2 + 50{,}4^2 - 2 \cdot 41{,}5 \cdot 50{,}4 \cdot \cos(92{,}76^\circ)$

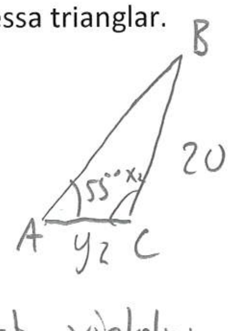
Lös $\Rightarrow x \approx 66{,}81$

D7. Det finns två trianglar *ABC* som uppfyller villkoren

Vinkel $A = 55°$
Sidan $AB = 22$ cm
Sidan $BC = 20$ cm

Bestäm den sista sidan, AC, i båda dessa trianglar. (1/2/0)





Sinussatsen:

$\frac{22}{\sin(x)} = \frac{20}{\sin(55^\circ)}$

Lös $\Rightarrow x_1 \approx 64{,}299^\circ$
$x_2 \approx 115{,}701^\circ$

(x_2 kan också fås som $180 - x_1$)

Sista vinkeln:
$B = 180 - 55 - 64{,}299$
$\approx 60{,}701^\circ$

Sinussatsen:
$\frac{\sin 60{,}701^\circ}{y} = \frac{\sin 55^\circ}{20}$

Lös $\Rightarrow y_1 \approx 21{,}29$

Sista vinkeln:
$B = 180 - 55 - 115{,}701$
$\approx 9{,}299^\circ$

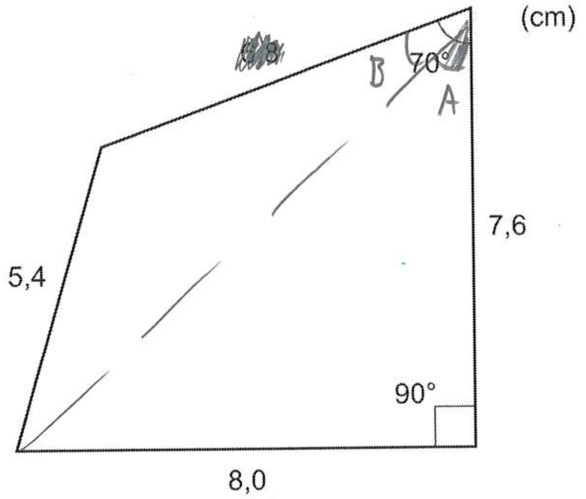
Sinussatsen:
$\frac{\sin 9{,}299^\circ}{y} = \frac{\sin 55^\circ}{20}$

Lös $\Rightarrow y_2 \approx 3{,}95$

D8. Uppgiften nedan är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften.

I mitten på nittiotalet köpte Sven en stor fritidstomt. Han tänker sälja en del av sin tomt och sälja den till priset 130 kr/m^2. På en karta markerar han det område han tänker sälja och mäter sidor och vinklar (se figuren). Kartans skala är 1:500.

Hur mycket ska han begära för tomten? (0/4/0)



Strategi:

1.) Dela in i 2 trianglar

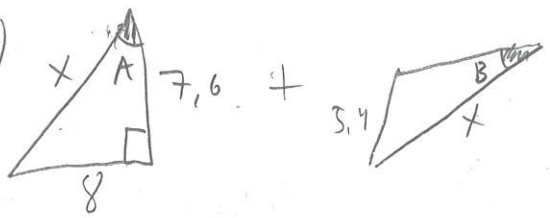
2.) Bestäm den gemensamma sidan (Pyth. sats)

3.) Bestäm de två delarna av vinkel 70°

4) sin-satsen för att få sida-vinkel-sida

5) Areorna via areasatsen

1.)



2) $8^2 + 7{,}6^2 = x^2$

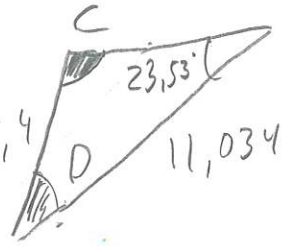
$x \approx 11{,}034$

3) Sinussatsen: (el. rätvinklig trigonometri)

$\frac{\sin A}{8} = \frac{\sin 90°}{x}$

$A \approx 46{,}46°$ $\Rightarrow B = 70° - A = 23{,}53°$

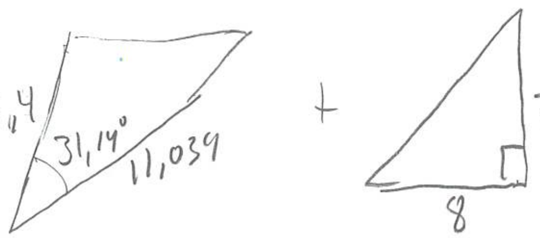
4)



Sinussatsen: $\frac{\sin 23{,}53°}{5{,}4} = \frac{\sin C}{11{,}034} \Rightarrow C \approx 125{,}33°$

Vinkelsumman $\Rightarrow D = 180 - 23{,}53 - 125{,}33 \approx 31{,}14°$

5)



$\Rightarrow A_{tomt} = 45{,}8 \cdot 500 \cdot 500$

$= 11451153\,cm^2$

$= 1145{,}12\,m^2$

$\Rightarrow$ Priset $= 1145 \cdot 130$

≈ 148900 kr

$\text{Arean} = \frac{5{,}4 \cdot 11{,}034 \cdot \sin(31{,}14°)}{2} + \frac{8 \cdot 7{,}6}{2} \approx 15{,}4 + 30{,}4 = 45{,}8\ cm^2$

D9. För en cirkel med medelpunkt i första kvadranten gäller följande:

1. Cirkeln har dubbelt så stor omkrets som enhetscirkeln
2. Cirkeln *tangerar* x-axeln.
3. Den punkt på cirkeln som ligger närmast origo har avståndet 8.

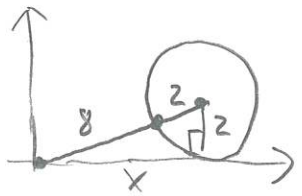
Bestäm cirkelns ekvation. (1/1/1)

Svara exakt!

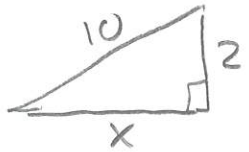
1. Dubbelt så stor omkrets ⇒ Dubbelt så stor radie ⇒ Radien är 2

2. Tangerar y-axeln ⇒ Mittpunktens y-koord = Radien = 2

3.



⇒



Pyth. sats:

$x^2 + 2^2 = 10^2 \Rightarrow x = \sqrt{96}$

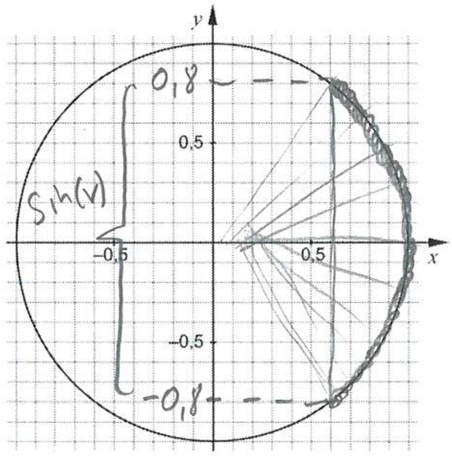
Mittpunkt: $(\sqrt{96}, 2)$

Radie = 2

⇒ Ekvationen:

$(x - \sqrt{96})^2 + (y-2)^2 = 4$

D10. Figuren till höger visar en enhetscirkel.
Använd den för att lösa uppgiften nedan.

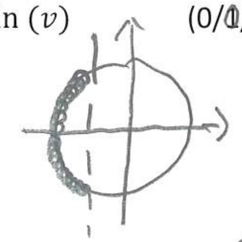


För vinkeln v gäller att

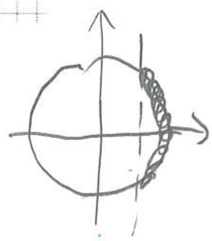
$\cos(180^\circ - v) \leq -0{,}6$

Bestäm alla möjliga värden på sin (v) (0/1/2)

$\cos(180^\circ - v) \leq -0{,}6 \Rightarrow$



$\Rightarrow \cos(v) \geq 0{,}6$

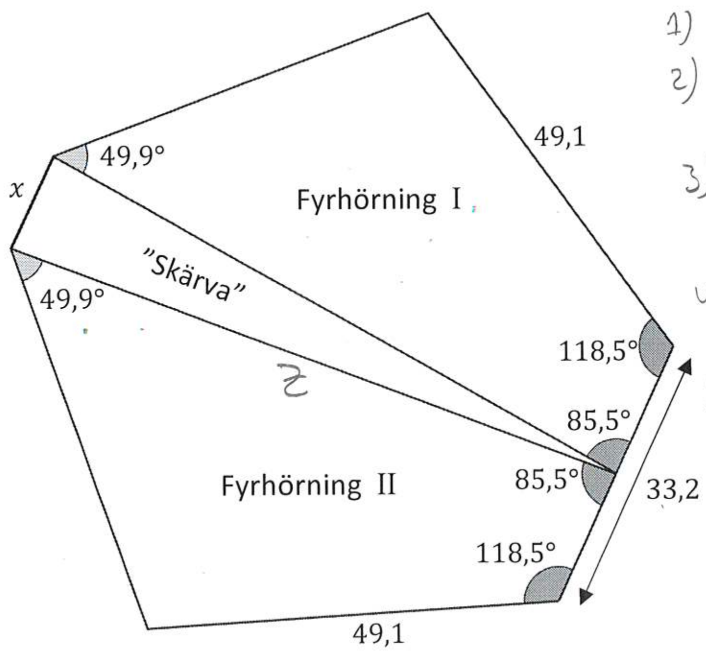


$(180^\circ - v)$ motsvarar en spegling i y-axeln

sin motsvarar y-värdena ⇒ $-0{,}8 \leq y \leq 0{,}8$

$-0{,}8 \leq \sin(v) \leq 0{,}8$

D11. Figuren visar två *identiska* fyrhörningar som skarvats ihop.
Skarvandet har dock skett slarvigt, så därför har det uppstått en skärva i mitten.
x är en sträcka hos skärvan.



Strategi:
1) Dela II i två trianglar
2) Bestäm den gemensamma sidan med cosinussatsen
3) Bestäm de två delarna till vinkeln 85,5°
4). Bestäm sidan z
5) Utnyttja att skärvan är likbent och att toppvinkeln är känd för att bestämma x

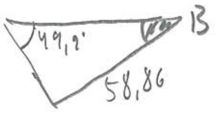
Bestäm sträckan x (1/2/2)

1)

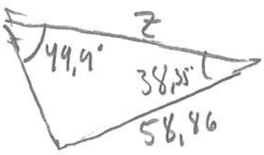

2) cosinussatsen: $y^2 = 49{,}1^2 + 16{,}6^2 - 2 \cdot 49{,}1 \cdot 16{,}6 \cdot \cos(118{,}5°) \Rightarrow$ Lös $\Rightarrow y \approx 58{,}86$

3)


Sinussatsen: $\dfrac{\sin(A)}{49{,}1} = \dfrac{\sin(118{,}5°)}{58{,}86} \Rightarrow$ Lös $\Rightarrow A \approx 47{,}15°$

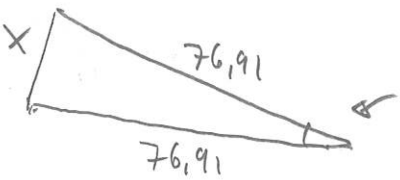


$B = 85{,}5° - A = 85{,}5° - 47{,}15° \Rightarrow B \approx 38{,}35°$

4)


Sista vinkeln $= 180° - 49{,}9° - 38{,}35° = 91{,}75°$

Sinussatsen $\Rightarrow \dfrac{\sin 91{,}75°}{z} = \dfrac{\sin 49{,}9°}{58{,}86} \Rightarrow$ Lös $z \approx 76{,}91$

5)


Toppvinkeln $= 180 - 85{,}5 - 85{,}5 = 9°$

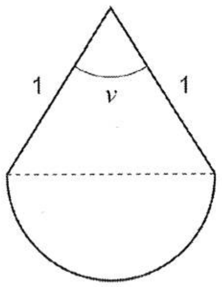
cosinussatsen:

$x^2 = 76{,}91^2 + 76{,}91^2 - 2 \cdot 76{,}91 \cdot 76{,}91 \cdot \cos 9°$

Lös $\Rightarrow$ $x \approx 12{,}07$

D12. Uppgiften nedan är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften.

Figuren visar ett område som består av en likbent triangel och en halvcirkel.
Två av sidorna i triangeln har längden 1 längdenhet, se figur.



Bestäm vinkeln v så att områdets area blir så stor som möjligt.
Svara med minst tre värdesiffror.

(0/1/2)

Området består av två delar:

Arean blir då: $A = \dfrac{1 \cdot 1 \cdot \sin(v)}{2} + \dfrac{\pi \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2}{2}$

(areasatsen) (arean av en halvcirkel)

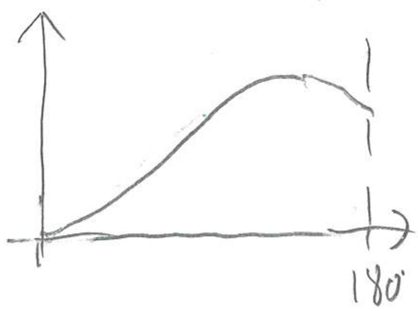
Detta är ett samband med 2 variabler.
Sambandet mellan dessa ges dock av cosinussatsen:

$x^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos(v) = 2 - 2\cos(v)$

Sätts dessa in i areasambandet fås:

$A = \dfrac{\sin(v)}{2} + \dfrac{\pi \cdot (2 - 2\cos(v))}{8}$

Ritas grafen för $0 \leq v \leq 180$ fås:



Extrempunkt $\Rightarrow$ $v \approx 147{,}518^\circ$