Matematik 3c – Bra saker att kunna med Geogebra

Allmänna grejer:

A1. Skriva in de fyra räknesätten.

A2. Skriva in decimaltal

A3. Skriva upphöjt till i inmatningen

A4. Skala om x-axeln och y-axeln var för sig och zooma in och ut.

A5. Hantera funktioner.

A6. Hitta skärningspunkter mellan funktioners grafer, eller med koordinataxlarna

A7. Lösa ekvationer med kommandot Lös.

A8. Kunna hitta nollställen

A9. Låsa fast punkter på grafer.

A10. Kunna hantera glidare

Lite mer matematik 3c-grejer:

B1. Kunna derivera funktioner.

B2. Kunna räkna ut funktionsvärden och derivator vid specifika x-värden

B3. Plocka fram tangenter i specifika punkter

B4. Hitta extrempunkter till funktioner (t.ex. vid Max/min-problem).

B5. ”Speciella punkter”

B6. Lösa triangelsatser-ekvationer, eller derivataekvationer med kommandot Lös

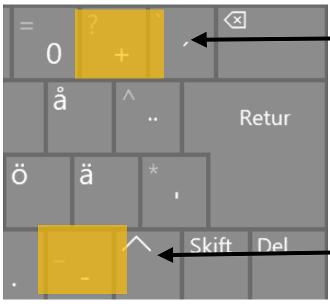
B7. Kunna bestämma värdet av integraler.

B8. Kunna bestämma primitiva funktioner.

A1. Skriva in de fyra räknesätten

Räknesätten kan klickas fram, men det är stor fördel rent tidsmässigt att lära sig skriva dem via tangentbordet.

Plus och minus fås via ett direkt knapptryck på respektive tangent:



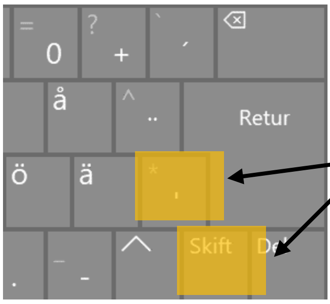
Plus

Minus

$$b = -5 + 3 - 4 + 7 - 2$$

$\rightarrow$ -1

Gånger fås via ”*” som sitter bredvid ENTER-knappen:

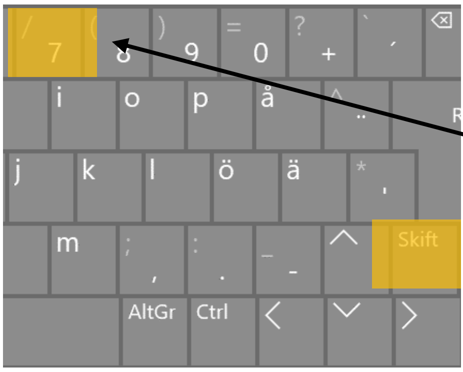


Tryck på SHIFT och * samtidigt

$$c = 3 \cdot 4\,(-2)$$

$\rightarrow$ -24

Division fås via ”/” som sitter på samma knapp som 7



Tryck på SHIFT och 7 samtidigt

$$d = \frac{5}{3+4+2}$$

$\rightarrow \frac{5}{9}$

$$d = \frac{5}{3+4+2}$$

$\rightarrow \frac{5}{9}$

Svaret skrivs i bråkform.
Önskar man decimaltal, tryck på knappen till höger

$\approx$ 0.56

A2. Skriva in decimaltal

Alla decimaltal skrivs i Geogebra med **PUNKT**, och alltså **INTE KOMMA.**

Exempel: Beräkna $4{,}5 \cdot 3{,}9$

Lösning: Skriv "4.5*3.9" (se G1 för hur man skriver *)

$$a = 4.5 \cdot 3.9$$

$$\rightarrow \; 17.55$$

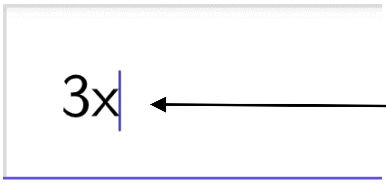
OBS!! PUNKT INTE KOMMA!!

Alltså gäller att $4{,}5 \cdot 3{,}9 = 17{,}55$

A3. **Skriva upphöjt till i inmatningen**

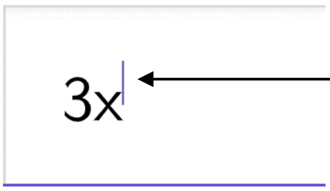
Att skriva ”upphöjt till” görs väldigt ofta. Det kan göras genom klickning, men kan med fördel göras via tangentbordet med hjälp av ”^” som görs via SHIFT och knappen med ” ^ ”

Exempelvis, om ” $3x^4$ ” ska skrivas in gäller:

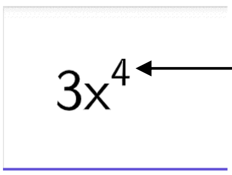


Markören i nedsänkt läge!

Tryck på SHIFT och ^ samtidigt

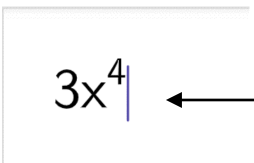


Markören i upphöjt läge!



Skriv in exponenten

Tryck en gång på högerpil för att sänka ned markören.

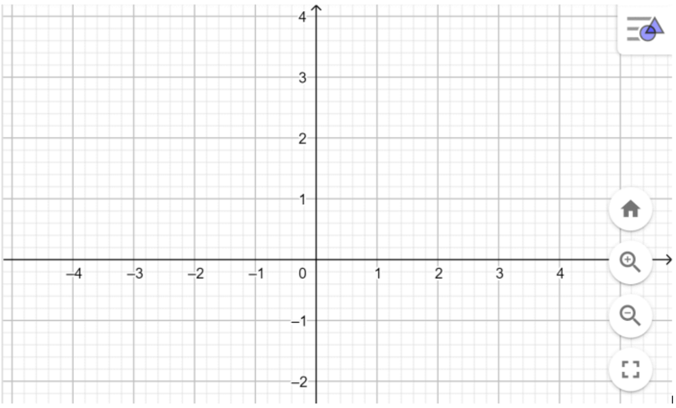


Markören i nedsänkt läge!

A4. Skala om x-axeln och y-axeln var för sig och zooma in och ut.

Ofta behöver man få en bättre uppfattning om en graf än standardinställningen, (T.ex. så kan hela eller viktiga delar av grafen vara utanför bild)

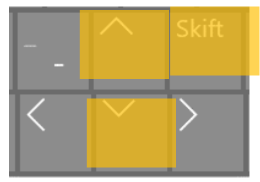
Då behöver man kunna justera visandet av koordinatsystemet efter behov.



Klicka någonstans i koordinatsystemet

Håll inne SHIFT och tryck på piltangenterna samtidigt.

Höger och vänster skalar om x-axeln



Upp och ned skalar om y-axeln

Zoomning kan också göras via ikonerna i koordinatsystemet.

Återställer så att zoompunkten är i mitten, och så att axlarna är på standard (-5 till 5 på x-axeln och -3 till 3 på y-axeln)

Zoomar in mitt i bilden

Zoomar ut mitt i bilden

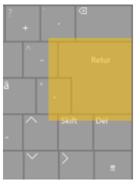
A5. Hantera funktioner

Funktioner skrivs in genom att skriva in själva funktionsuttrycket.
Då ges funktionen ett namn enligt namnprincipen f, g, h osv

Exempel 1: För funktionen f gäller att $f(x) = 5x - 4$.
Bestäm värdet av $f(12)$

Skriv in själva **funktionsuttrycket**.

5x − 4

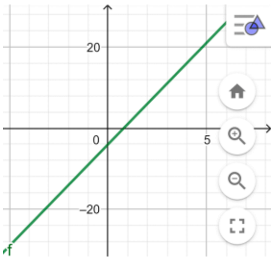


När du trycker Enter
ges funktionen sitt namn

f(x) = 5 x − 4

Samtidigt dyker dess graf upp i koordinatsystemet

(Se mer i **G7**)



Skriv det du vill beräkna,
I detta fall $f(12)$

f(12)

→ 56

Alltså är $f(12) = 56$

Exempel 2: En boll kastas rakt upp.
Bollens höjd över marken, $h\ meter$,
efter tiden, $t\ sekunder$,
ges av sambandet

$h = 11{,}5t - 4{,}91t^2 + 1{,}2$

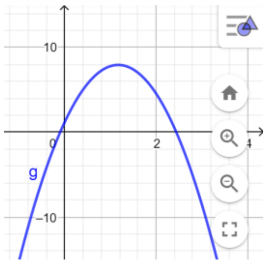
På vilken höjd är bollen efter 1,5 sekunder?

I formeln heter variabeln t, vilket är en variabel som funkar att använda i Geogebra, men är man osäker på vilka variabelnamn som funkar kan alltid variabeln x skrivas in, dvs i detta fall:

$11.5x - 4.91x^2 + 1.2$

Tryck Enter och funktionen får ett namn ,

och dess graf dyker upp i koordinatsystemet →



$g(x) = 11.5\,x - 4.91\,x^2 + 1.2$

Höjden efter 1,5 sekunder = $g(1.5)$

g(1.5)

→ 7.4

Bollens höjd är 7,4 meter efter 1,5 sekunder

A6. Hitta skärningspunkter mellan funktioners grafer, eller med koordinataxlarna

För att hitta skärningspunkter mellan två olika grafer eller mellan grafer och koordinataxlarna används kommandot *Skärning(Objekt, Objekt)*

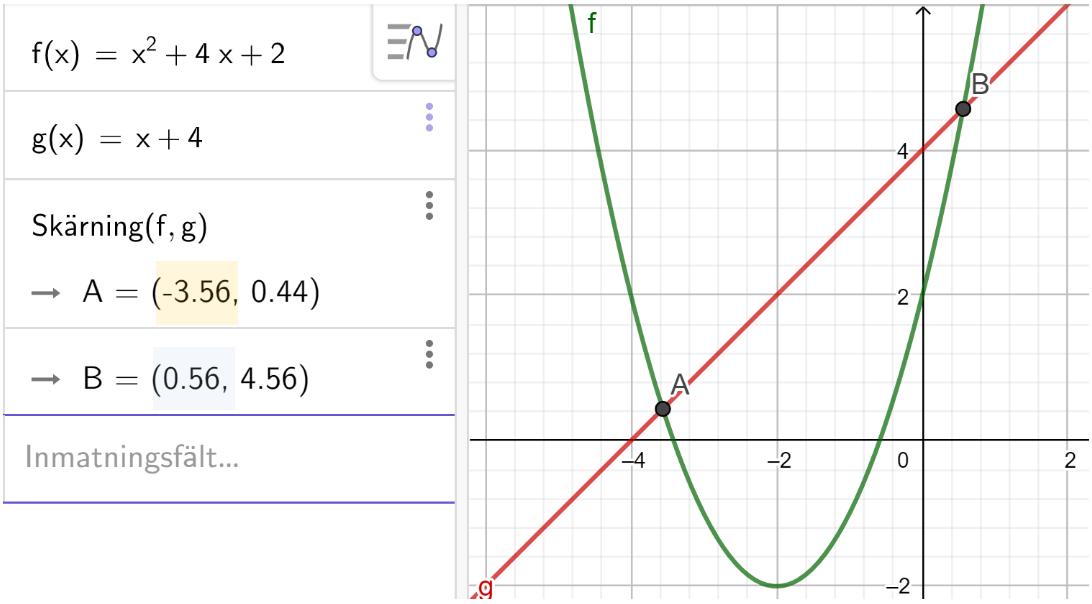
Svaret av detta blir den eller de punkter där graferna möts.

Detta kan t.ex. användas för att lösa ekvationer. Då är det dock bara x-värdena som söks.

Exempel: Lös ekvationen $x^2 + 4x + 2 = x + 4$

Skriv in respektive sida av ekvationen som en egen funktion.

Använd sedan ” Skärning (de båda funktionernas namn skiljda med komma) ” (se bild)



Ekvationens lösningar är
$x_1 \approx -3{,}56$

$x_2 \approx 0{,}56$

Fortsättning på nästa sida.

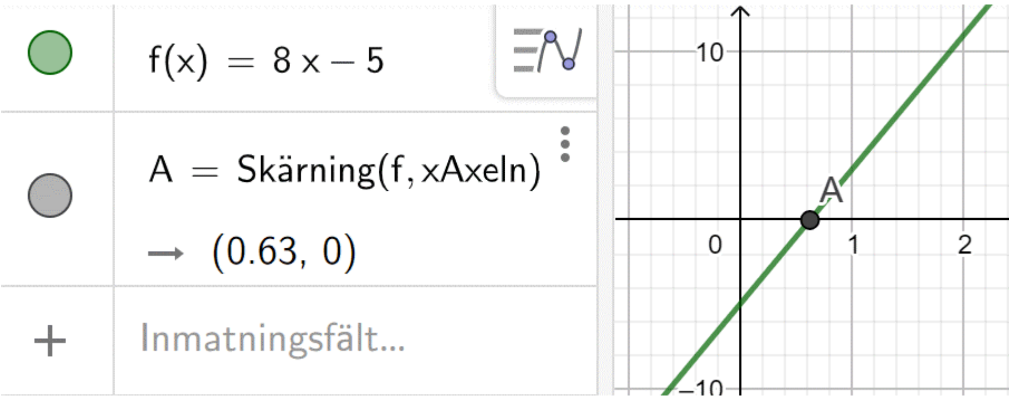
A6. Hitta skärningspunkter mellan funktioners grafer, eller med koordinataxlarna - fortsättning

Vill man hitta skärningspunkter med axlarna heter dessa ”xAxeln” och ”yAxeln”

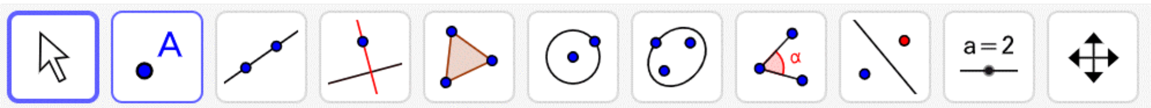
(notera att det spelar roll att A:et är stort – annars funkar det inte):

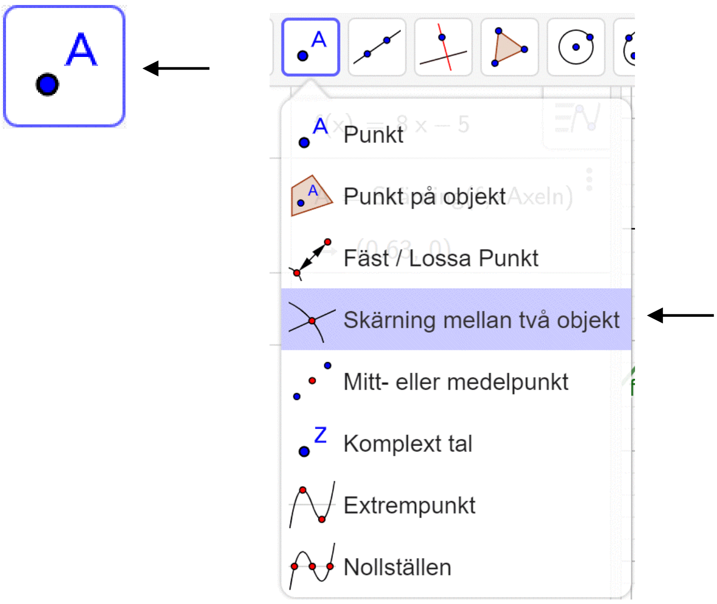
OBS! Skärning med koordinataxlarna är ett av kommandona som ingår i ”Speciella punkter” (se B5)

Exempel: Var skär funktionen $f(x) = 8x - 5$ x-axeln?



Kommandot Skärning finns också klickbart via en av menyerna högst upp.





Klicka då på de två grafer (eller koordinataxlar) som ska skära varandra, och Geogebra ”skriver” rätt kommando i inmatningen.

A7. Lösa ekvationer med kommandot Lös

Ekvationer kan lösas genom att använda kommandot

Lös(Ekvation)

Lättast brukar vara att först skriva in ekvationen.
Då får ekvationen ett namn på formen ”Ekv1”, ”Ekv2”, ”Ekv3” osv

Exempel 1: Lös ekvationen $5x - 8 = 3 - 2(x - 5)$

Skriv in ekvationen precis som den står (dvs inklusive lika med tecknet)

$$5x - 8 = 3 - 2(x - 5)$$

Tryck Enter och ekvationen får ett namn.

$$\text{Ekv1}: 5x - 8 = 3 - 2(x - 5)$$

För att lösa ekvationen, skriv *Lös (ekvationens namn).* I detta fall:

Lös(Ekv1)

$$\rightarrow \{x = 3\}$$

Ekvationens lösning är $x = 3$

Exempel 2: Lös ekvationen $12 \cdot 1{,}45^x = 75$

Ekv2: 12 * 1.45^x = 75

l3 = Lös(Ekv2)

$$\rightarrow \left\{x = \frac{-\ln(4) + 2\ \ln(5)}{\ln(29) - \ln(4) - \ln(5)}\right\}$$

≈

l3 = NLös(Ekv2)

$$\approx \{x = 4.93\}$$

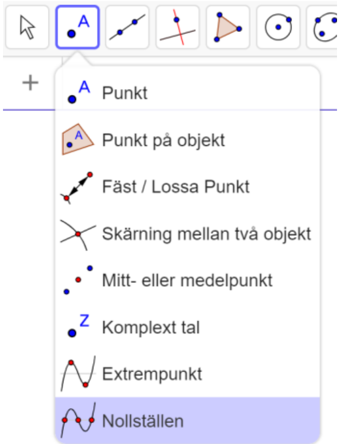
Detta (groteska) svar är det exakta svaret, men oftast söks ett ungefärligt värde…

…tryck då på denna ikon

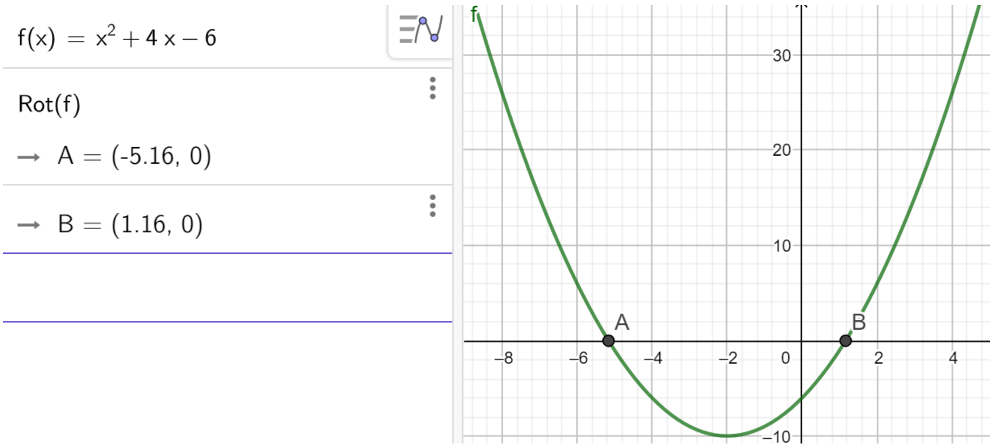
Ekvationens lösning är $x \approx 4{,}93$

A8. Kunna hitta nollställen

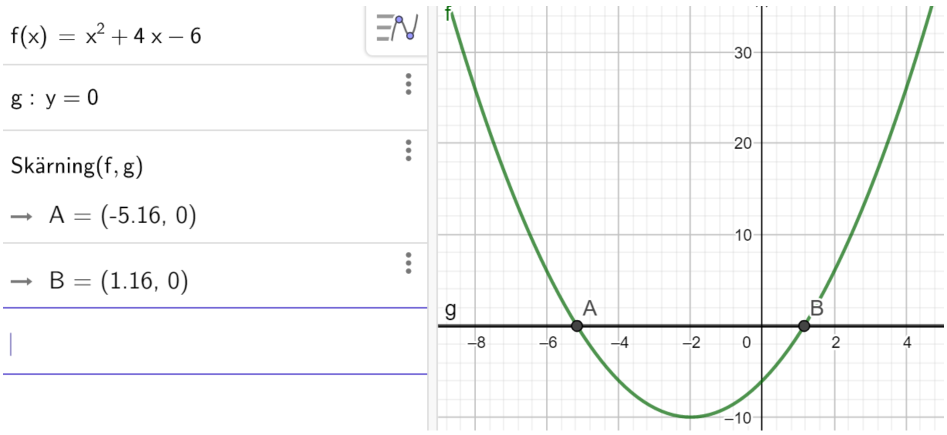
Använd antingen kommandot "Rot(Funktion)" *Finns också klickbart:*



OBS!! Detta ligger även inbyggt i "Speciella punkter" (se B5)



...eller använd Skärning



Notera att nollställena endast är x-värdena, dvs i detta fall: $x_1 \approx -5{,}16$ *och* $x_2 \approx 1{,}16$

Önskas exakta svar på nollställena kan kommandot "*Lös(Ekvation)*" användas

$$l1 = \text{Lös}(f = 0)$$

$$\rightarrow \left\{x = -\sqrt{10} - 2, x = \sqrt{10} - 2\right\} \quad \approx$$

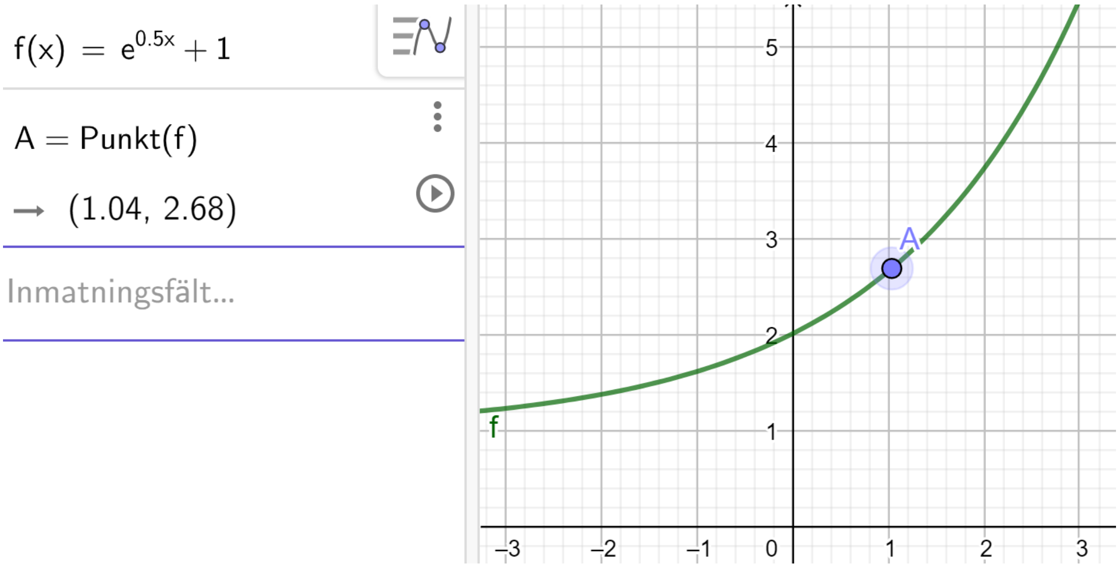
$$l1 = \text{NLös}(f = 0)$$

$$\approx \{x = -5.16, x = 1.16\} \quad \rightarrow$$

Används för att växla mellan exakta och ungefärliga svar

A9. Låsa fast punkter på grafer.

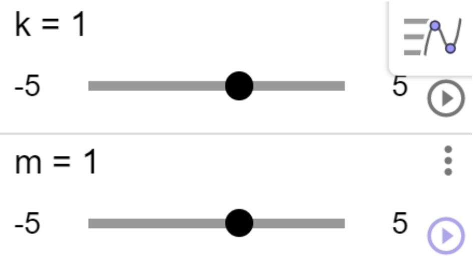
Kommandot *Punkt(Objekt)*



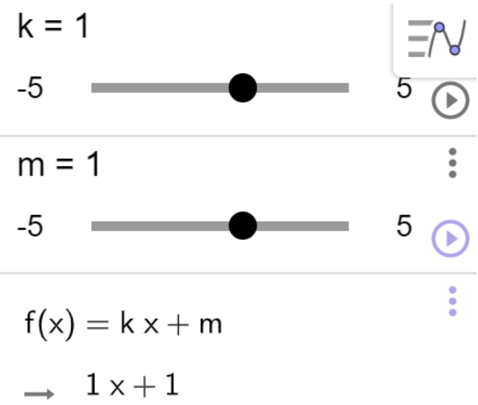
A blir en flyttbar punkt
(flytta den genom att hålla in musen och dra, eller trycka på ”Play”-pilen)
som alltid kommer ligga på grafen.

A10. Kunna hantera glidare

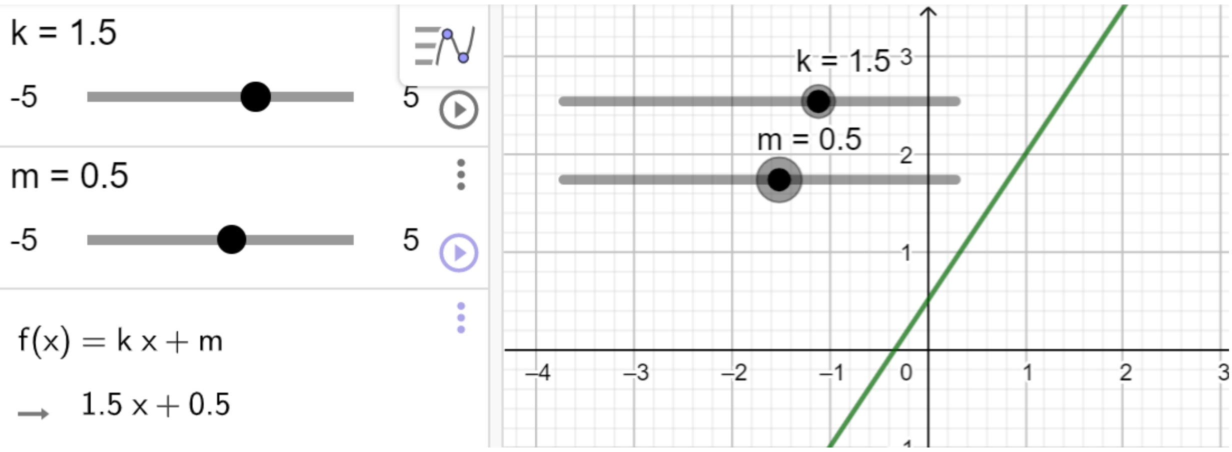
Skriv in glidarens namn genom att ange en bokstav (eller ett ord)



Skriv in en formel som innehåller glidarna.

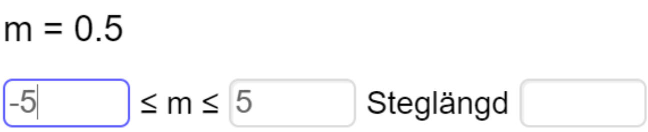


Genom att ändra på glidarna kommer linjens utseende ändras



Önskar glidarnas gränser ändras kan man klicka på gränserna.

…och skriva in nya värden. Steglängd = hur tätt värdena stegas fram.



B1. Kunna derivera funktioner.

Använd antingen kommandot ”Derivera(Funktion)”

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 1$$

Derivera(f)

$$\rightarrow \quad 3x^2 + 4x + 4$$

…eller skriv f ’

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 1$$

$$f'$$

$$\rightarrow \quad 3x^2 + 4x + 4$$

För att skriva ”prim”-apostrofen används ” ’ ”

B2. Kunna räkna ut funktionsvärden och derivator vid specifika x-värden

Varje gång man skrivit in funktioner får dessa namn (se A5)

Exempelvis. Skriver man in ” $x^3 + 2x^2 + 4x + 1$ ” ges denna funktion ett namn:

Vill man beräkna funktionsvärden eller derivatavärden skrivs:

Funktionens namn (x-värdet)

Funktionens namn ’ (x-värdet)

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 1$$

Funktionens namn = f

$$a = f(2)$$

$$\rightarrow 25$$

y-värdet då $x = 2$

(blir i detta fall 25)

$$b = f'(2)$$

$$\rightarrow 24$$

derivatan då $x = 2$

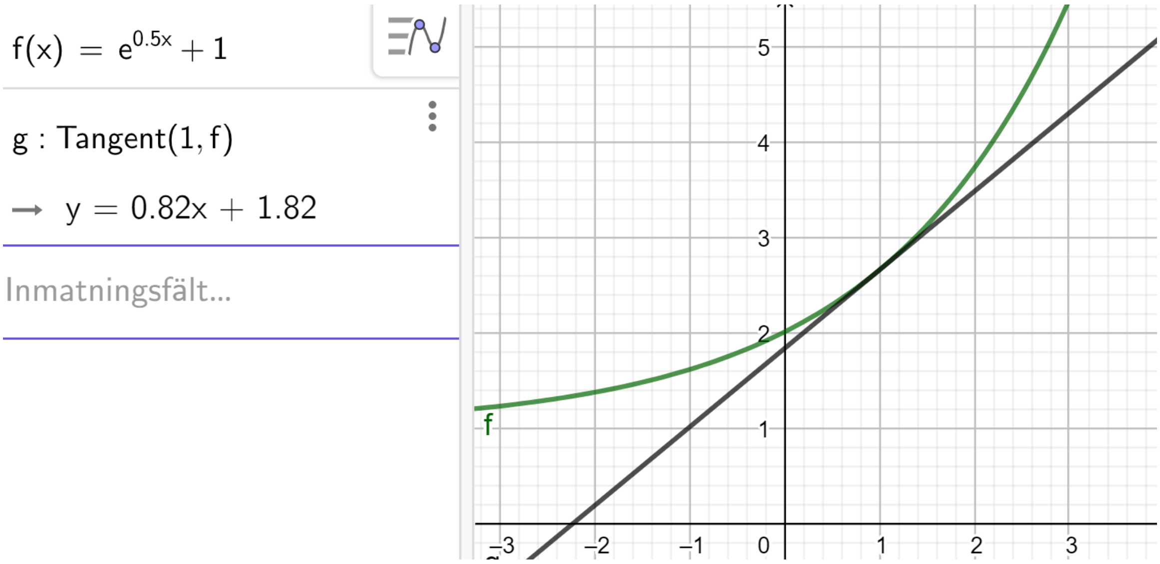
(blir i detta fall 24)

För att skriva ”prim”-apostrofen används ” ’ ”

B3. Plocka fram tangenter i specifika punkter

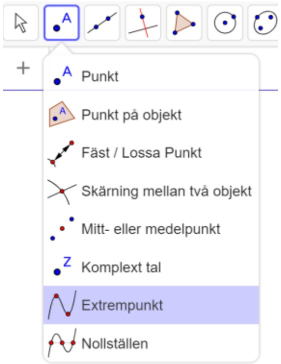
Kommandot Tangent(Punkt, Funktion)

(Det funkar både med bara x-värden, eller med punkter)



B4. Hitta extrempunkter till funktioner (t.ex. vid Max/min-problem).

Kommandot Extrempunkt(Polynom) Finns också klickbart via:



OBS!! Detta ligger inbyggt i ”Speciella punkter” (se B5)

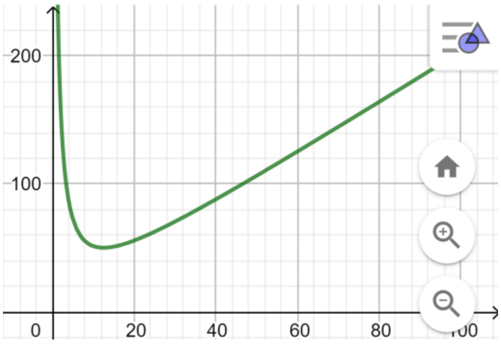
Exempel: Bestäm minsta värdet av funktionen

$$f(x) = \frac{100\pi}{x} + 2x \qquad x \geq 0$$

Skriv in funktionen
(π kan skrivas med pi)

$$\frac{100\text{pi}}{x} + 2x \xrightarrow{\text{Enter}} f(x) = \frac{100\ \pi}{x} + 2\,x$$

Anpassa fönstret så extrempunkten syns (Se A4 för detaljer)
(detta är egentligen inte alltid nödvändigt, men det underlättar kanske förståelsen)

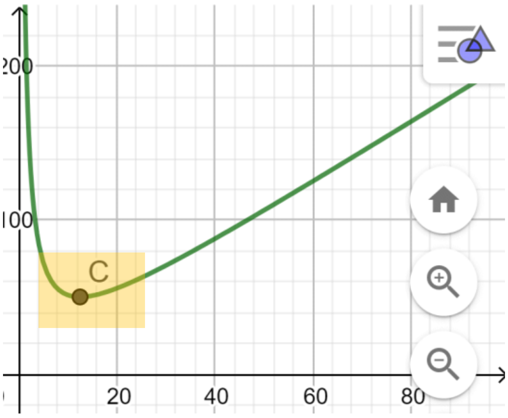


Skriv

”Extrempunkt (f) ”

Extrempunkt(f)

↓ Enter



Extrempunkt(f, −5.7323, 99.7425)

→ A = (0, -18745137551.103)

→ B = (0, ∞)

→ C = (12.5331, 50.1326)

Det minsta värdet är 50,13 som fås då $x \approx 12{,}53$

OBS! Extrempunkt-kommandot ger även maxpunkter, men det var inte aktuellt i detta exempel.

B5. ”Speciella punkter”

Speciella punkter är bara ett klickbart kommando för att ”automatiskt” hitta:

Extrempunkter (se B4)

Skärning med koordinataxlarna (se A3)

Nollställen (se A8)

Exempel: Bestäm alla ”Speciella punkter” till:

$$f(x) = x^3 + 4\,x^2 - 20\,x + 8$$

Skriv in funktionen:

$$x^3 + 4\,x^2 - 20\,x + 8$$

Enter

$$f(x) = x^3 + 4\,x^2 - 20\,x + 8$$

Klicka på dessa tre punkter

$f(x) = x^3 + 4\,x^2 - 20\,x + 8$

Inmatningsfält...

Speciella punkter

Kopiera input

Radera

Inställningar

Välj ”Speciella punkter”

$f(x) = x^3 + 4\,x^2 - 20\,x + 8$

Rot(f)

→ A = (-7.014, 0)

→ B = (0.4438, 0)

→ C = (2.5703, 0)

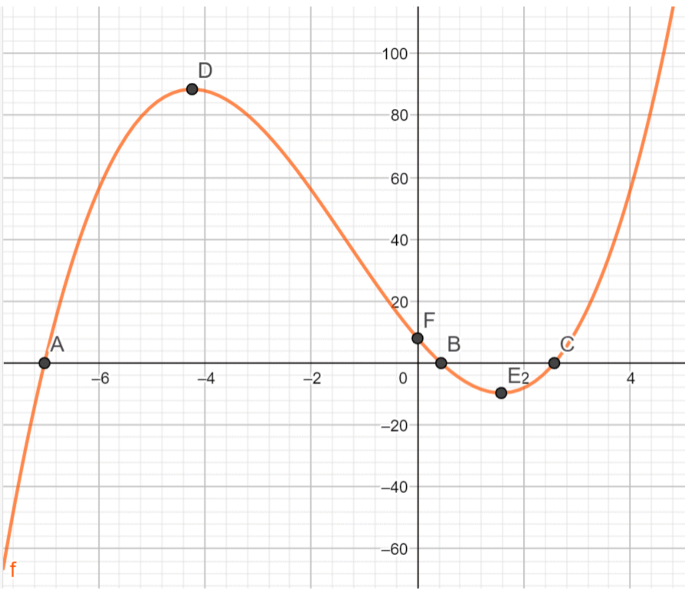
Extrempunkt(f)

→ D = (-4.2393, 88.4854)

→ E = (1.5726, -9.6706)

F = Skärning(f, yAxeln)

→ (0, 8)



Ofta är ”Speciella punkter” mer info än vad som söks, men önskas någon av de tre sakerna (nollställen, extrempunkter, skärning med y-axeln) var för sig, kan dessa skrivas in (se respektive punkt för detaljer)

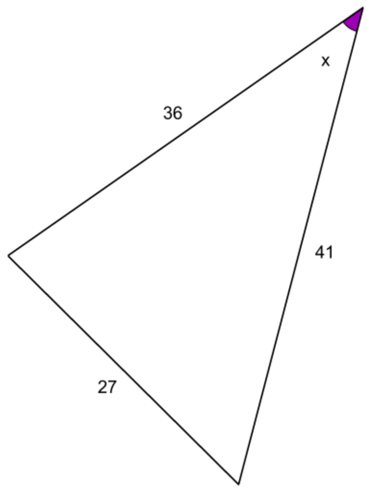
B6. Lösa triangelsatser-ekvationer, eller derivataekvationer med kommandot Lös

Kommandot ”Lös” är redan presenterat under A7, men här är mer fokus på att understryka användbarheten i två stycken typiska matte 3c-situationer:

1) Ekvationer skapade av triangelsatserna

2) Ekvationer relaterade till derivata

Exempel 1: Figuren visar en triangel.
Bestäm vinkeln x



Cosinussatsen ger följande ekvation:

(fråga din mattelärare för detaljer)

$$27^2 = 41^2 + 36^2 - 2 \cdot 41 \cdot 36 \cdot \cos{(x)}$$

Skriv in ekvationen som den står
Glöm inte parentesen efter cos!
(OBS! Ibland behöver man skriva dit ett gradtecken efter x:et

Gradtecken skrivs med
Alt + O

(eller genom att skriva deg)

$$27^2 = 41^2 + 36^2 - 2 \cdot 41 \cdot 36 \cos(x°)$$

Tryck Enter, och ekvationen får sitt namn, i detta fall Ekv1:

$$\text{Ekv1: } 27^2 = 41^2 + 36^2 - 2 * 41 * 36\cos(x°)$$

Skriv ”Lös (Ekv1) ”

$$\text{l1} = \text{Lös(Ekv1)}$$

$$\rightarrow \left\{ x = \frac{-\left(180\ \cos^{-1}\left(\frac{281}{369}\right)\right)}{\pi}, x = \frac{180\ \cos^{-1}\left(\frac{281}{369}\right)}{\pi} \right\} \approx$$

Och tryck på ”Ungefär lika med”-knappen för att få numeriska svar:

$$\{x = -40.4018, x = 40.4018\}$$

Att det blir flera svar beror på definitionen av sin och cos enligt enhetscirkeln. Välj det svar som stämmer in på situationen. I detta fall

$$x \approx 40{,}4°$$

B6. Lösa triangelsatser-ekvationer, eller derivataekvationer med kommandot Lös - fortsättning

Exempel 2: Bestäm de x för vilka funktionerna

$$f(x) = x^3 - 2x - 2 \text{ och } g(x) = x^2 + 0{,}2x - 4$$

har samma lutning

Skriv in funktionerna var för sig…

$$f(x) = x^3 - 2x - 2$$

$$g(x) = x^2 + 0.2x - 4$$

Och sedan ”Lös (f’ = g’) ”

$$\text{Lös}(f' = g')$$

För att skriva ”prim”-apostrofen används ” ’ ”

OBS!! Ibland kan Lös-kommandot vid dessa problem krångla och bara visa ”?”

Lös då genom skärning med derivatagraferna!
(Rita upp f’ och g’, och hitta deras skärningspunkter (se A6))

Om det fungerar ger det exakta svar:

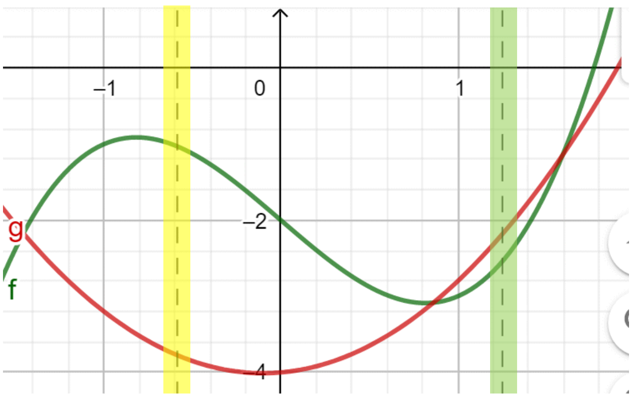
$$l1 = \text{Lös}(f'(x) = g'(x))$$

$$\rightarrow \left\{x = \frac{-\sqrt{190}+5}{15}, x = \frac{\sqrt{190}+5}{15}\right\} \quad \approx$$

Söks ungefärliga svar, tryck på ”Ungefär lika med”-knappen,

$$\{x = -0.5856, x = 1.2523\}$$

Detta innebär att vid dessa x-värden har de båda graferna samma lutning.



B7. Kunna bestämma värdet av integraler.

Integraler bestäms med kommandot

Integral(Funktion, Från, Till)

Exempel: En sprintlöpare springer ett hundrameters lopp.
Under hennes första 3 sekunder kan funktionen
$f(x) = 2{,}2x^2 - 0{,}1x^3$
beskriva hastigheten som hon springer med.

f är hastigheten i $meter/sekund$ efter x $sekunder$.

Beräkna $\int_0^2 f\,dx$ och tolka resultatet.

Börja med att skriva in funktionen: $2.2x^2 - 0.1x^3$

Det ger funktionen ett namn.
I detta fall f

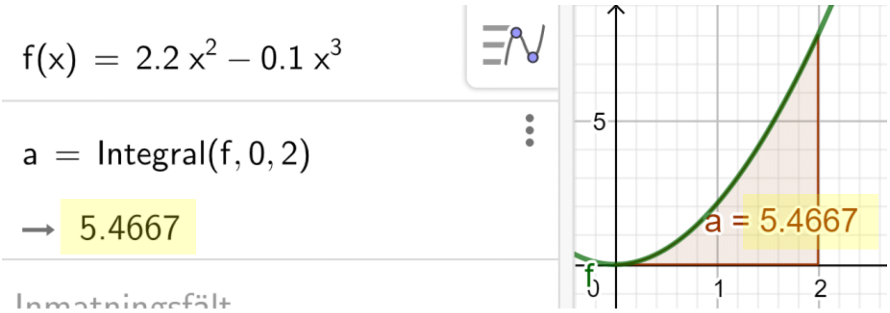
$f(x) = 2.2\,x^2 - 0.1\,x^3$

Skriv

Integral(f, 0, 2)

Integral(f, 0, 2)

Svaret kommer både nedanför och som en utritad integral i koordinatsystemet:



Integralens värde är $\approx 5{,}47$

Det innebär i detta fall att sprintern – enligt denna modell - hunnit 5,47 meter de första 2 sekunderna.

B8. Kunna bestämma primitiva funktioner.

En primitiv funktion fås med kommandot

Integral(Funktion)

(dvs samma kommando som integraler, men utan att ange gränserna)

Exempel: För en funktion gäller att $f'(x) = 2x^3 + 6$ och att $f(3) = 5$

Bestäm $f(x)$

Primitiv funktion till f' är f.

Skriv därför in den givna f' funktionen: $2x^3 + 6$

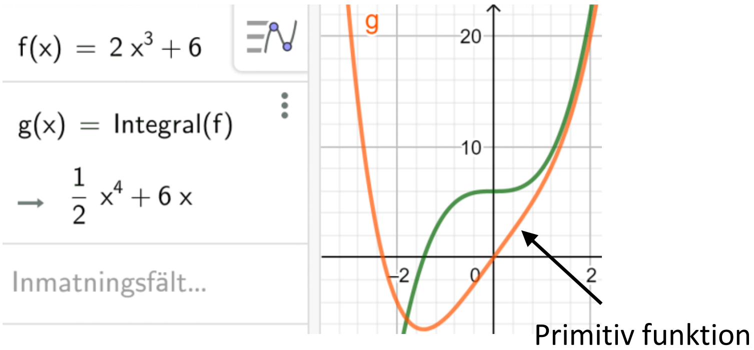
(bry dig inte så mycket om namnet den får i Geogebra, utan här är fokus på att hitta dessa primitiv funktion)

Skriv ”Integral (f) ”

$f(x) = 2x^3 + 6$

Integral(f)

Här finns två möjligheter. Antingen svarar Geogebra med en glidare som ska representera konstanttermen hos den primitiva funktionen (ofta kallat C) eller ibland sker det inte alls.



Nästa steg är att hitta värdet på C som gör att $f(3) = 5$.

Det kan göras på massvis med sätt, exempelvis med kommandot Lös, eller genom glidare. (eller genom att lösa för hand)
Här visas en variant med ”Lös”.

$a = g(3)$ (bestämmer först det ”nuvarande” värdet då $x = 3$)

$\rightarrow \frac{117}{2}$

$l1 = \text{Lös}(a + x = 5)$

$\rightarrow \left\{x = \frac{-107}{2}\right\}$ (och låter Geogebra svara på hur mycket som ska adderas för att det istället ska bli 5)

$$f(x) = \frac{x^4}{2} + 6x - \frac{107}{2}$$

Det finns så klart fler kommandon som kan vara användbara, inte minst att jobba i det symbolhanterande CAS-läget, som underlättar komplicerade algebraiska situationer, men det får tas upp i ett annat dokument för den som är intresserad.

Vid funderingar, kontakta Mattias på

mattias.djurvall@umea.se

073 71 71 552