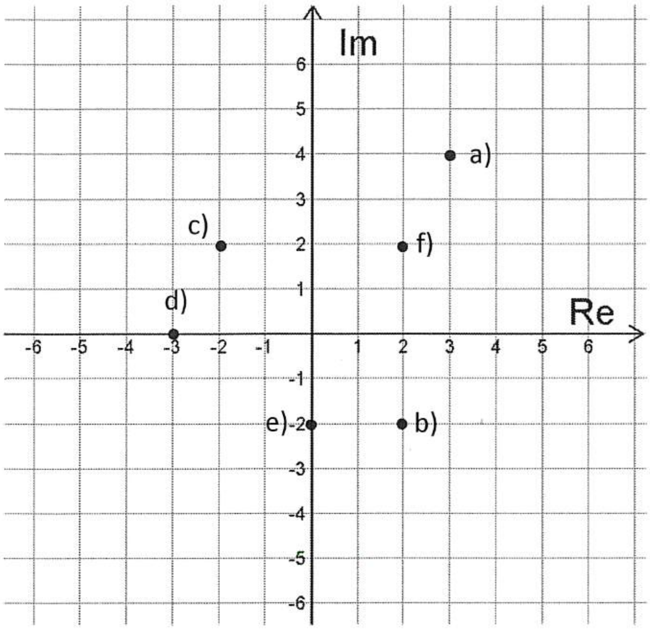
FAC IT

1.1 Rektangulär form

Del 1 – Utan digitala verktyg

1. Nedan visas ett komplext talplan med talen a) – f) markerade.

   a) Ange dessa tal på formen $a + bi$ (3/0/0)



a) $z = 3 + 4i$

b) $z = 2 - 2i$

c) $z = -2 + 2i$

d) $z = -3$

e) $z = -2i$

f) $z = 2 + 2i$

   b) Två av de komplexa talen ovan är varandras *konjugat.* Vilka två är det? (1/0/0)

Konjugat har samma realdel, men spegelvänd imaginärdel, dvs "speglas i Re-axeln": b) och f)

2. Ange ett valfritt komplext tal, z, som uppfyller villkoren nedan

   a) $Re\, z = 4$ Ex: $z = 4 + 5i$ (4:an är enda kravet) (1/0/0)

   b) $Im\, \bar{z} = 2$ Ex: $z = 3 - 2i$ ($-2i$ är enda kravet) (1/0/0)

   c) $Re\, z = Im\, z$ Ex: $z = 5 + 5i$ (Samma siffra 2 ggr) (1/0/0)

3. Kurt-Sune och Berit påstår att det inte finns några komplexa tal, z, alls som uppfyller villkoret $Im\, z = Im\, \bar{z}$

   Har de rätt? *Motivera ditt svar.* (2/0/0)

Kurt-Sune har nästan rätt, då Imaginärdelen hos ett konjugat växlar tecken, Ex: $z = 5 + 2i$, $\bar{z} = 5 - 2i$

MEN! Om Im-delen är noll blir det ändå samma Im-del: Ex: $z = 2 + 0i$, $\bar{z} = 2 - 0i$

dvs – De har fel!

4. Låt $z_1 = 3 + 2i$ och $z_2 = 2 - 4i$. Utför beräkningarna nedan.

a) $z_1 + z_2$ $\quad 3+2i + 2-4i = 5-2i$ (1/0/0)

b) $z_2 - z_1$ $\quad 2-4i-(3+2i) = \left[\begin{matrix}\text{Minus framför} \\ (\ )\end{matrix}\right]$ (1/0/0)

$= 2-4i-3-2i = -1-6i$

c) $z_1 \cdot z_2$ $\quad (3+2i)\cdot(2-4i) = 6-12i+4i-8i^2$ (2/0/0)

$= [i^2=-1] = 6-8i+8 = 14-8i$

d) $Im(\,(Re\, z_1)\cdot \overline{z_2}\,)$ $\quad = Im(3\cdot(2+4i)) =$ (0/1/0)

$Re\, z_1 = 3$, $\overline{z_2} = (2+4i)$ $\quad = Im(6+12i) = 12$

5. Låt $z_1 = 3 + 4i$ och $z_2 = 1 - 5i$.
Utför nedanstående beräkningar.

a) $z_1 - 2\cdot z_2$ $\quad = 3+4i-2\cdot(1-5i) =$ (2/0/0)

$= 3+4i-2+10i = 1+14i$

b) ${z_1}^2 - z_2^2$ $\quad = (3+4i)^2-(1-5i)^2 =$ (1/1/0)

$= 9+24i+16i^2-(1-10i+25i^2) =$

$= [i^2=-1] = 9+24i-16-(1-10i-25)$

$= \left[\begin{matrix}\text{Minus framför} \\ (\ )\end{matrix}\right] = -7+24i+24+10i$

$= 17+34i$

6. Genomför divisionerna:

a) $\frac{8-i}{1-2i}$ $= \left[\begin{matrix}\text{Förläng med}\\ \text{nämnarens konj.}\end{matrix}\right] = \frac{(8-i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} =$ (2/0/0)

$= \left[\begin{matrix}\text{konj. regeln}\\ \text{i nämnaren}\end{matrix}\right] = \frac{8+16i-i-2i^2}{1^2-4i^2} =$

$= [i^2=-1] = \frac{8+15i+2}{1+4} = \frac{10+15i}{5} = 2+3i$

b) $\frac{14+8i}{2+3i}$ (Samma tänk som i 6a) (2/0/0)

$= \frac{(14+8i)(2-3i)}{4+9} = \frac{28-42i+16i-24i^2}{13} = \frac{52-26i}{13}$

$= 4-2i$

7. För de två komplexa talen A och B gäller att

$A \cdot B = 20 - 9i$ $\Rightarrow A = \frac{20-9i}{B} = 3-2i$ dvs $A = 3-2i$

och

$\frac{20-9i}{B} = 3 - 2i$ $\Rightarrow B = \frac{20-9i}{3-2i}$

Bestäm talen A och B (2/0/0)

$B = \frac{20-9i}{3-2i} = \left[\begin{matrix}\text{Förläng med}\\ \text{nämnarens konj.}\end{matrix}\right] = \frac{(20-9i)\cdot(3+2i)}{9+4} = \frac{60+40i-27i-18i^2}{13}$

$= [i^2=-1] = \frac{60+13i+18}{13} = \frac{78+13i}{13} = 6+i$

$A = 3-2i$ $B = 6+i$

8. Bestäm konstanten k så att

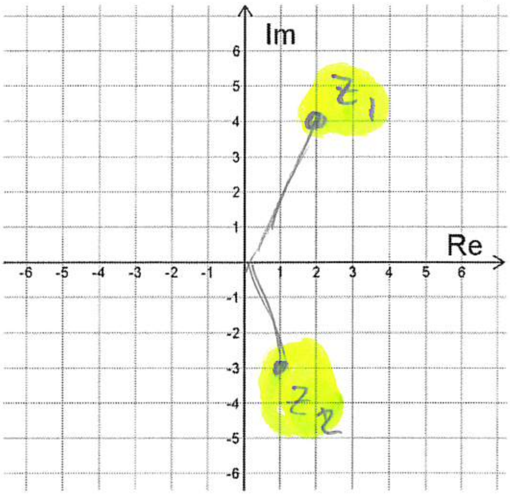
$Im\left(\frac{a+bi}{ki}\right) = 1$ $\frac{a+bi}{ki} = \frac{(a+bi)\cdot i}{ki\cdot i} = \frac{ai+bi^2}{ki^2}$ (0/2/0)

$= [i^2=-1] = \frac{ai-b}{-k} = \frac{-b+ai}{-k}$

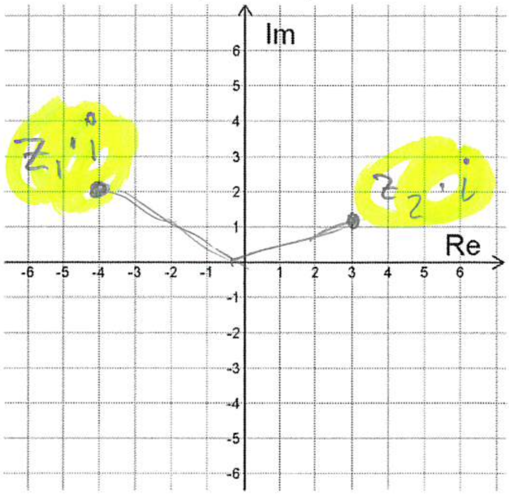
$Im\left(\frac{-b+ai}{-k}\right) = \frac{a}{-k} = 1 \Rightarrow k = -a$

9. Utgå från talen $z_1 = 2 + 4i$ och $z_2 = 1 - 3i$ och multiplicera dessa med talet i

Markera både talen före och efter multiplikationen i de komplexa talplanet nedan.



De två talen **före** multiplikationen med i



De två talen **efter** multiplikationen med i

a) Jämför bilderna. Det finns ett geometriskt samband mellan ett komplext tal *före och efter* multiplikation med i. Beskriv sambandet. (1/1/0)

$z_1 \cdot i = (2+4i) \cdot i = 2i + 4i^2 = -4 + 2i$

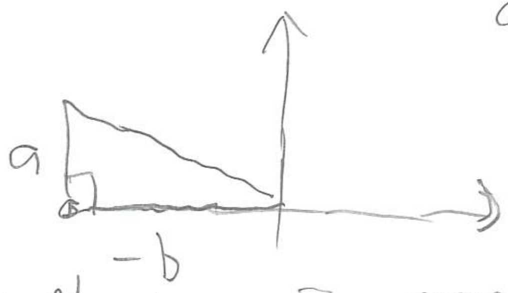
$z_2 \cdot i = (1-3i) \cdot i = i - 3i^2 = 3 + i$

Sambandet är att talet "roterar 90° moturs" i det komplexa talplanet.

b) Bevisa att sambandet i a) gäller för alla komplexa tal. (0/1/1)

Utgå från $z = a + bi$. Då blir $z \cdot i = (a+bi) \cdot i$
$= ai - b = -b + ai$

Det motsvarar ett tal där Im och Re bytt plats.



dvs samma triangel som z men vriden 90° moturs

10. Lös ekvationerna

a) $z^3 - 10z^2 + 34z = 0$ (2/0/0)

Bryt ut z: $z(z^2 - 10z + 34) = 0$

$z = 0$ el. $z^2 - 10z + 34 = 0$

pq: $z = 5 \pm \sqrt{25 - 34} = 5 \pm \sqrt{-9}$

$= [\sqrt{-9} = \sqrt{9} \cdot i = 3i] = 5 \pm 3i$

b) $2z - 3\bar{z} + 6i = -4 + i$ (1/1/0)

Anta att $z = a + bi \Rightarrow 2a + 2bi - 3(a - bi) + 6i =$

$= 2a + 2bi - 3a + 3bi + 6i =$

$= -a + 5bi + 6i \Rightarrow a = 4$

Jmf med HL: $(-4 + 1i)$ $\quad -4 \quad +1i$

$b = -1$

$z = 4 - 1i$

c) $2z + i\bar{z} = 10 + 11i$ (1/2/0)

Anta att $z = a + bi \Rightarrow 2(a + bi) + i \cdot (a - bi) =$

$= 2a + 2bi + ai - bi^2 = 2a + b + 2bi + ai$

$= 2a + b + (2b + a) \cdot i$

Jmf med HL $\Rightarrow 10 + 11i \Rightarrow \begin{cases} 2a + b = 10 \\ a + 2b = 11 \end{cases}$

ekv. system, add metoden $\Rightarrow \begin{matrix} 2a + b = 10 \\ -2a - 4b = -22 \end{matrix} \Rightarrow -3b = -12 \Rightarrow b = 4$

$a = 3$

$z = 3 + 4i$

d) $\dfrac{1}{z + 2\bar{z}} = 4 + 2i$ (0/1/1)

$\dfrac{1}{z + 2\bar{z}} = 4 + 2i \Rightarrow z + 2\bar{z} = \dfrac{1}{4 + 2i} = \dfrac{4 - 2i}{16 + 4} = \dfrac{4 - 2i}{20} = 0{,}2 - 0{,}1i$

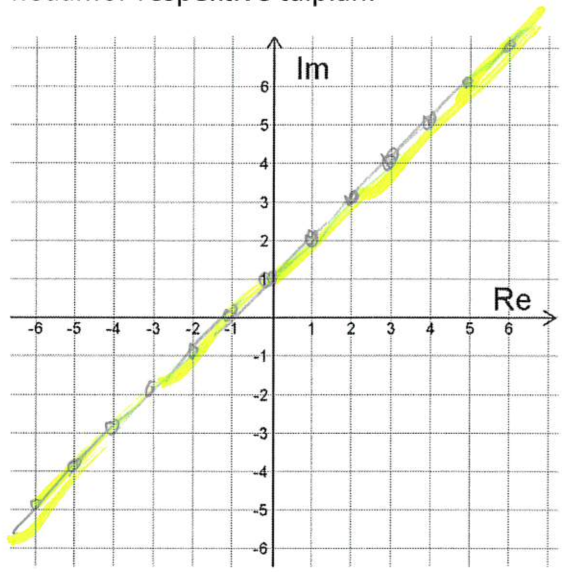
Anta att $z = a + bi \Rightarrow a + bi + 2a - 2bi = 0{,}2 - 0{,}1i$

$3a - bi = 0{,}2 - 0{,}1i$

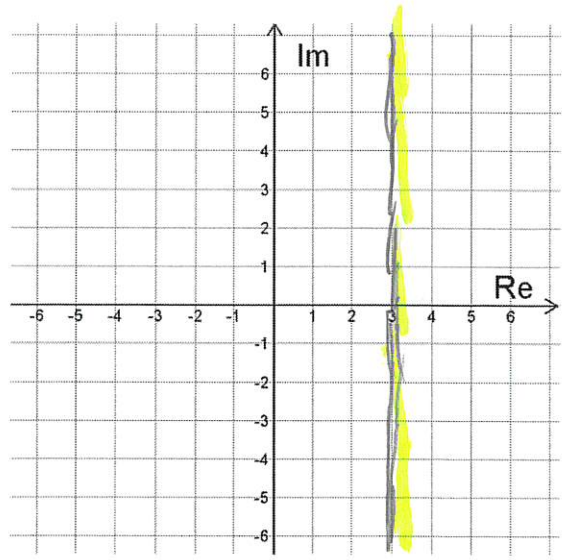
$3a = 0{,}2$ $\quad -b = -0{,}1$ $\quad z = a + bi =$

$a = \dfrac{0{,}2}{3} = \dfrac{2}{30}$ $\quad b = 0{,}1 = \dfrac{1}{10}$ $\quad = \dfrac{2}{30} + \dfrac{1}{10}i$

11. Markera i de komplexa talplanen nedan **samtliga** tal som uppfyller villkoret nedanför respektive talplan.



a) $Im\, z = Re\, z + 1$ (0/2/0)



b) $Im(\bar{z} \cdot i) = 3$ (0/2/0)

Lättast är att jämföra med ett vanligt koord. system

$Im\, z = y$

$Re\, z = x$

$y = x + 1$

dvs en rät linje med $k = 1$

$m = 1$

Anta att $z = a + bi$

$\Rightarrow \bar{z} = a - bi$

$Im(\bar{z} \cdot i) = Im((a - bi) \cdot i)$

$= Im(ai - bi^2) =$

$= [i^2 = -1] =$

$= Im(ai + b) =$

$= a$

dvs

detta är alla tal med

$a =$ Realdelen $= 3$

Del 2 – Med digitala verktyg

I dessa uppgifter är det i första hand en fråga om att själv lära sig upptäcka geometriska mönster av de fyra räknesätten för komplexa tal med hjälp av Geogebra.

Sätt ut två komplexa tal, skapa allt eftersom summor, differenser, produkter och kvoter, och flytta runt de komplexa talen för att se hur svaret rent geometriskt kan beskrivas!

D1. Undersök hur en *summa* och en *differens* kan beskrivas geometriskt i det komplexa talplanet. (2/0/0)

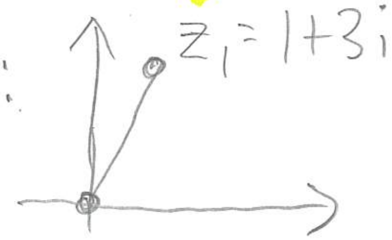
Koordinaterna adderas/subtraheras var för sig

⇒ Samma princip som vid summan av vektorer

D2. Det finns en matematisk funktion som kallas *"abs"* (absolutbelopp). Undersök med hjälp av Geogebra vad *absolutbeloppet* innebär för ett komplext tal. (1/0/0)

Absolutbeloppet av ett komplext tal ger avståndet från origo.

ex:



$\text{abs } z_1 = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$

D3. Det finns en matematisk funktion som kallas *"arg"* (argument) Undersök med hjälp av Geogebra vad *argumentet* innebär för ett komplext tal. (0/1/0)

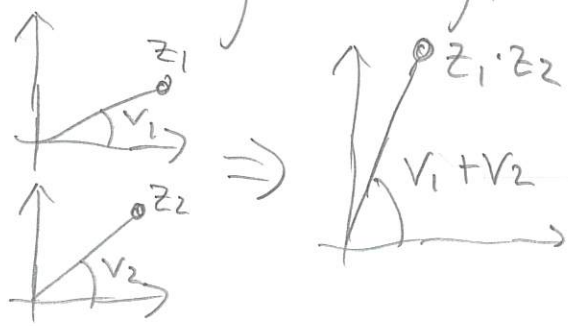
Argumentet av ett komplext tal ger vinkeln mellan Re-axeln och talet

D4. Undersök hur en *produkt* mellan två komplexa tal kan beskrivas geometriskt i det komplexa talplanet. (0/1/1)

Vid en produkt kommer absolutbeloppet och argumentet ändras var för sig enligt principen:

Argumenten adderas

Abs-beloppen multipliceras

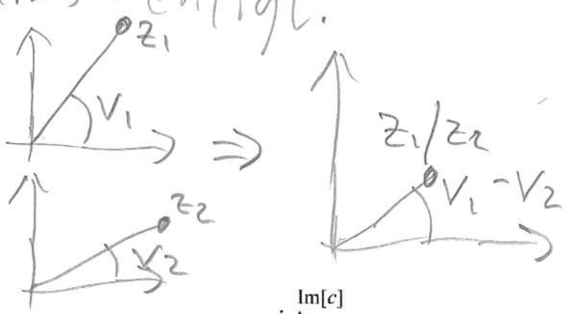


D5. Undersök hur en *kvot* mellan två komplexa tal kan beskrivas geometriskt i det komplexa talplanet. (0/1/1)

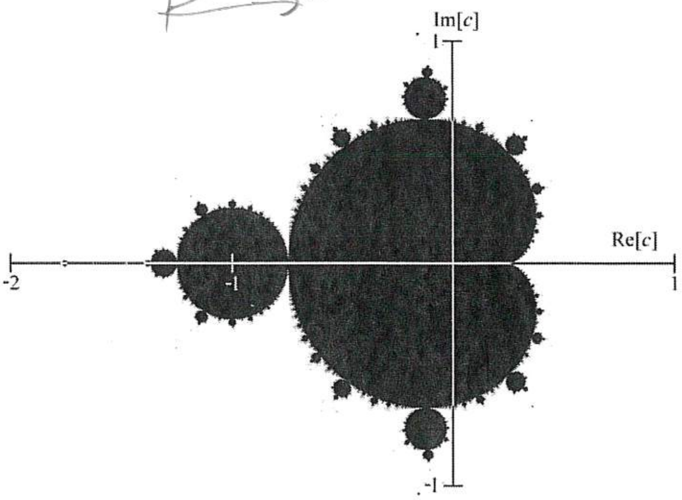
En kvot funkar som en omvänd produkt, dvs arg och abs ändras enligt:

Argumenten subtraheras

Abs-beloppen divideras



D6. I den s.k. ”Mandelbrot-fraktalen” ingår de punkter, z, där *absolutbeloppet* ”inte sticker iväg” efter att beräknats enligt den upprepade beräkningen $svaret^2 + z$ ett visst antal gånger. Använd ditt digitala verktyg för att testa om nedanstående punkter ingår i ”Mandelbrot-fraktalen” eller inte.



$z_1 = 1$ ← Ingår ej

$z_2 = -1$ ← Ingår

$z_3 = 0,5i$ ← ingår

$z_4 = 0,8i$ ← ingår ej

(0/1/2)

$z_1 = 1$

1. $0^2+1=1$
2. $1^2+1=2$
3. $2^2+1=5$
4. $5^2+1=26$

sticker iväg

$\Rightarrow$ 1 ingår ej

$z_2 = -1$

1. $0^2-1=-1$
2. $(-1)^2-1=0$
3. $0^2-1=-1$
4. $(-1)^2-1=0$

Växlar mellan 0 och −1

$\Rightarrow$ −1 ingår

$z_3 = 0,5i$

1. $0^2+0,5i=0,5i$
2. $0,5i^2+0,5i=-0,25+0,5i$
3. $\ldots = -0,1875+0,25i$
4. $\ldots = -0,027+0,41i$

Sticker inte iväg

$\Rightarrow$ 0,5i ingår

$z_4 = 0,8i$

1. $\ldots = 0,8i$
2. $\ldots = -0,64+0,8i$
3. $\ldots = -0,23-0,22i$
4. $\ldots$

Sticker iväg

$\Rightarrow$ 0,8i ingår ej