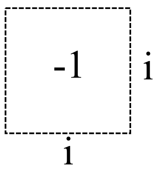
Komplexa tal - Rektangulär form

Med ett komplext tal menas ett tal som kan innehålla den imaginära enheten, i.

För den imaginära enheten, i, gäller att:

"Ett i motsvarar sidan hos en (tänkt) kvadrat med arean -1"



Det innebär att $i = \sqrt{-1}$ eller $i^2 = -1$

Ett komplext tal består av två delar:

Realdel och Imaginärdel

(Dessa skrivs Re och Im)

$$z = a + bi$$

Komplexa tal betecknas ofta z

Realdel (siffran utan i)

Imaginärdel (siffran framför i)

Exempel: Ange valfritt komplext tal, z, som uppfyller villkoren nedan:

a) $\mathrm{Re}\, z = 4$

b) $\mathrm{Im}\, z = 2 \cdot \mathrm{Re}\, z$

---

a) $\mathrm{Re}\, z = 4$ $\Rightarrow$ "Siffran utan i ska vara 4"

Exempelvis: $z = 4 + 6\mathrm{i}$

b) $\mathrm{Im}\, z = 2 \cdot \mathrm{Re}\, z$ $\Rightarrow$ "Siffran framför i ska vara dubbelt stor som den utan"

Exempelvis: $z = 5 + 10\mathrm{i}$

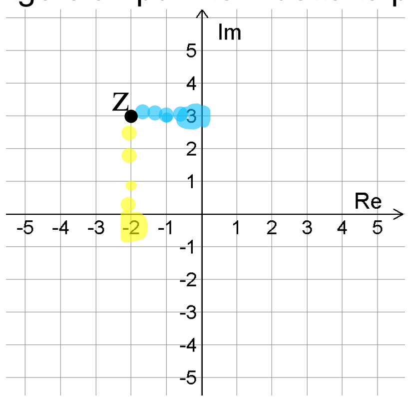
Komplexa talplanet

För att illustrera komplexa tal används det komplexa talplanet, som är ett koordinatsystem där de respektive axlarna representerar talets reella del och talets imaginära del var för sig. Talen utgörs av punkter i detta talplan.

Talet $z = -2 + 3i$

motsvarar punkten (-2, 3)

i det komplexa talplanet



Exempel: Markera talen a) - d) i ett komplext talplan

a) $z_1 = -2 - 4i$

b) $z_2 = 4$

c) $z_3 = i$

d) $z_4 = 1 - i$

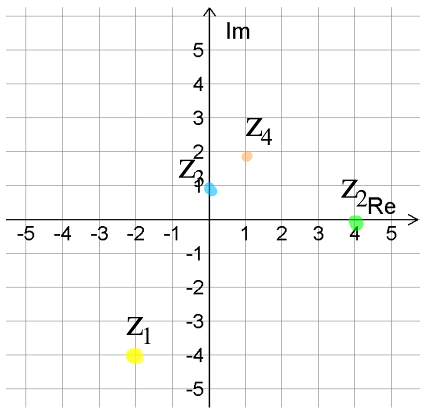
Komplettera talen så att både realdel och imaginärdel framgår och tolka sedan dessa som koordinater

a) $z_1 = -2 - 4i \Rightarrow (-2, -4)$

b) $z_2 = 4 = 4 + 0i \Rightarrow (4, 0)$

c) $z_3 = i = 0 + 1i \Rightarrow (0, 1)$

d) $z_4 = 1 + 2i \Rightarrow (1, 2)$



Centrala begrepp

Konjugat

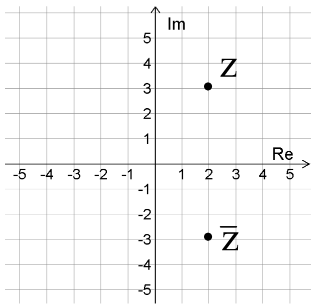
$\overline{z}$

Varje komplext tal (z) har ett konjugat ($\overline{z}$) där realdelen är densamma men imaginärdelen har ombytt tecken.

$z = a + bi$ $\quad\quad\quad$ $\overline{z} = a - bi$

Notera att "konjugatet till konjugatet" är talet själv, dvs $\overline{\overline{z}} = z$

I det komplexa talplanet motsvarar konjugatet alltid en spegling i den reella axeln (" x - axeln ")



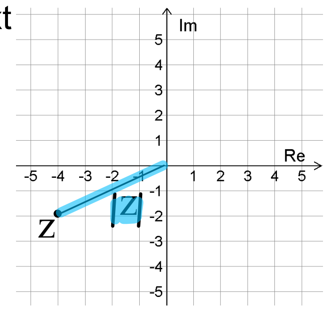
Absolut-belopp

$|z|$

Absolutbeloppet av ett komplext tal är ett rent reellt tal.
Det beräknas mha Pythagoras sats enligt:

roten ur summan av realdelen i kvadrat och imaginärdelen i kvadrat $\Rightarrow$ $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Absolutbeloppet av ett komplext tal svarar mot talets avstånd till origo.



Exempel: Visa att $|z|$ och $|\bar{z}|$ är samma för alla komplexa tal, z

---

Algebraisk lösning:

Utgå från ett allmänt komplext tal, z.
dvs $z = a + bi$

Då gäller att:

$z = a + bi \quad \Rightarrow \quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

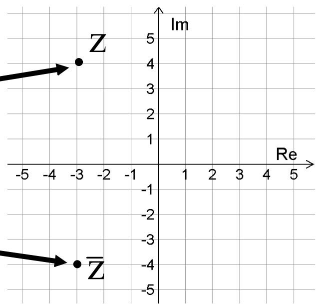
$\bar{z} = a - bi = a + (-b)i \quad \Rightarrow \quad |\bar{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2}$

Eftersom $b^2 = (-b)^2$ för alla reella tal b gäller att $|z| = |\bar{z}|$ vsv

---

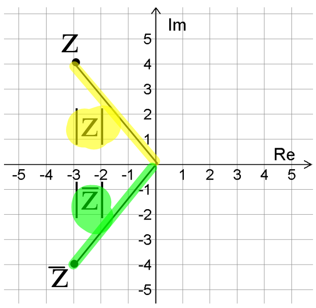
Grafisk lösning:

Utgå från ett allmänt komplext tal, z.
dvs en punkt i det komplexa talplanet



Då gäller att dess konjugat, $\bar{z}$,
är spegelbilden i reella axeln.

Absolutbeloppet för dessa är att tolka som deras avstånd till origo.



Pga symmetri är dessa avstånd alltid lika långa, och därför gäller att

$|z| = |\bar{z}|$ vsv

Räkneregler vid rektangulär form

I dessa exempel används de två talen $z_1 = 6 + 2i$ och $z_2 = 1 - i$

Addition
$+$

Addera realdelar för sig och imaginärdelar för sig.

$$z_1 + z_2 = (6 + 2i) + (1 - i) = 6 + 1 + 2i - i = 7 + i$$

Subtraktion
$-$

Subtrahera realdelar för sig och imaginärdelar för sig.
Kom i håg att behandla det andra talet med parentes , för att få rätt tecken!

$$z_1 - z_2 = (6 + 2i) - (1 - i) = 6 + 2i - 1 + i = 5 + 3i$$

OBS! Teckenbyte pga minus

Multiplikation
$\cdot$

Behandla talen som två parenteser och mutiplicera ihop faktor för faktor. Vid multiplikation uppstår i^2 - termer.
Enligt definitionen av talet i är dessa -1

$$z_1 \cdot z_2 = (6 + 2i)(1 - i) = 6 - 6i + 2i - 2i^2 =$$

OBS! $i^2 = -1$ $\quad -2(-1) = +2$

$$= 6 - 6i + 2i + 2 = 8 - 4i$$

Division
$/$

Innan själva divisionen utförs är strategin att förlänga så att nämnarens imaginära del försvinner. Detta görs genom förlängning med nämnarens konjugat.
Därefter gäller vanligt bråktänk.

$$z_1 / z_2 = \frac{6 + 2i}{1 - i}$$

Nämnaren är i detta fall $(1 - i)$.
Dess konjugat är $(1 + i)$

$$= \frac{(6 + 2i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)}$$

Täljaren för sig: $(6 + 2i)(1 + i) = 6 + 6i + 2i + 2i^2$

och Nämnaren för sig: $(1 - i)(1 + i) = 1 - i^2$

$$= \frac{6 + 8i + 2i^2}{1 - i^2}$$

Enligt definitionen: $i^2 = -1$

$$= \frac{6 + 8i + 2(-1)}{1 - (-1)} = \frac{4 + 8i}{2} = \frac{4}{2} + \frac{8i}{2} = 2 + 4i$$