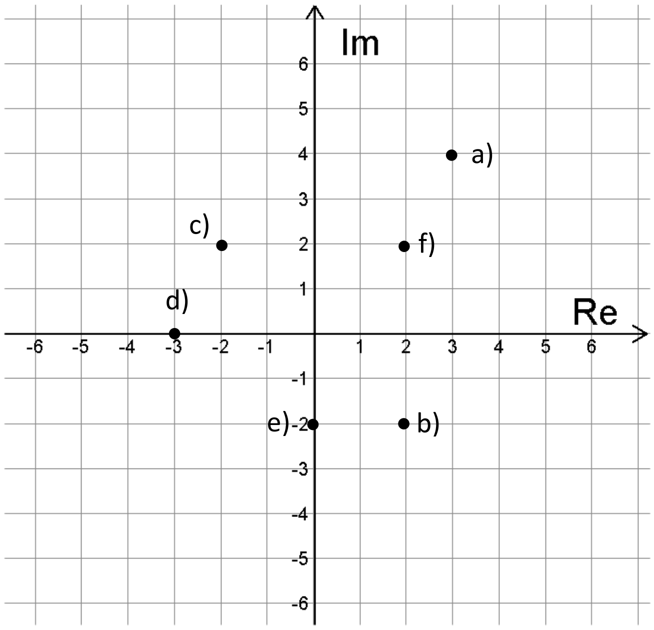
1.1 Rektangulär form

Del 1 – Utan digitala verktyg

1. Nedan visas ett komplext talplan med talen a) – f) markerade.

   a) Ange dessa tal på formen $a + bi$ (3/0/0)



   b) Två av de komplexa talen ovan är varandras *konjugat.* Vilka två är det? (1/0/0)

2. Ange ett valfritt komplext tal, z, som uppfyller villkoren nedan

   a) $Re\ z = 4$ (1/0/0)

   b) $Im\ \bar{z} = 2$ (1/0/0)

   c) $Re\ z = Im\ z$ (1/0/0)

3. Kurt-Sune och Berit påstår att det inte finns några komplexa tal, z, alls som uppfyller villkoret $Im\ z = Im\ \bar{z}$

   Har de rätt? *Motivera ditt svar.* (2/0/0)

4. Låt $z_1 = 3 + 2i$ och $z_2 = 2 - 4i$. Utför beräkningarna nedan.

a) $z_1 + z_2$ (1/0/0)

b) $z_2 - z_1$ (1/0/0)

c) $z_1 \cdot z_2$ (2/0/0)

d) $Im(\,(Re\ z_1) \cdot \overline{z_2}\,)$ (0/1/0)

5. Låt $z_1 = 3 + 4i$ och $z_2 = 1 - 5i$.
Utför nedanstående beräkningar.

a) $z_1 - 2 \cdot z_2$ (2/0/0)

b) ${z_1}^2 - z_2^2$ (1/1/0)

6. Genomför divisionerna:

a) $\dfrac{8-i}{1-2i}$ (2/0/0)

b) $\dfrac{14+8i}{2+3i}$ (2/0/0)

7. För de två komplexa talen A och B gäller att

$A \cdot B = 20 - 9i$

och

$\dfrac{20-9i}{B} = 3 - 2i$

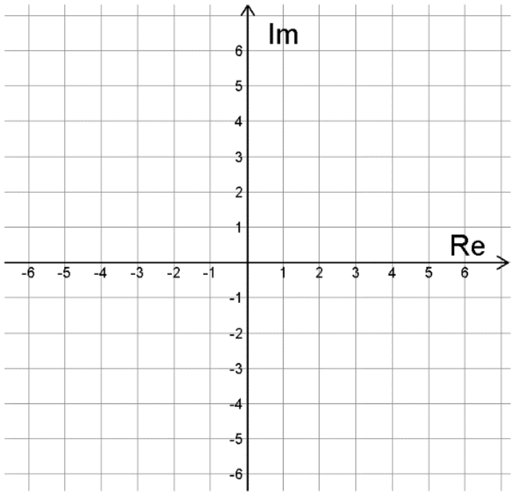
Bestäm talen A och B (2/0/0)

8. Bestäm konstanten k så att

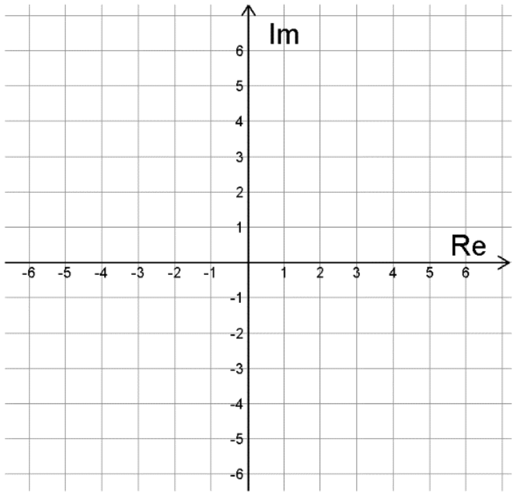
$Im\left(\dfrac{a+bi}{ki}\right) = 1$ (0/2/0)

9. Utgå från talen $z_1 = 2 + 4i$ och $z_2 = 1 - 3i$ och multiplicera dessa med talet i

Markera både talen före och efter multiplikationen i de komplexa talplanet nedan.



De två talen **före** multiplikationen med i



De två talen **efter** multiplikationen med i

a) Jämför bilderna. Det finns ett geometriskt samband mellan ett komplext tal *före och efter* multiplikation med i. Beskriv sambandet. (1/1/0)

b) Bevisa att sambandet i a) gäller för alla komplexa tal. (0/1/1)

10. Lös ekvationerna

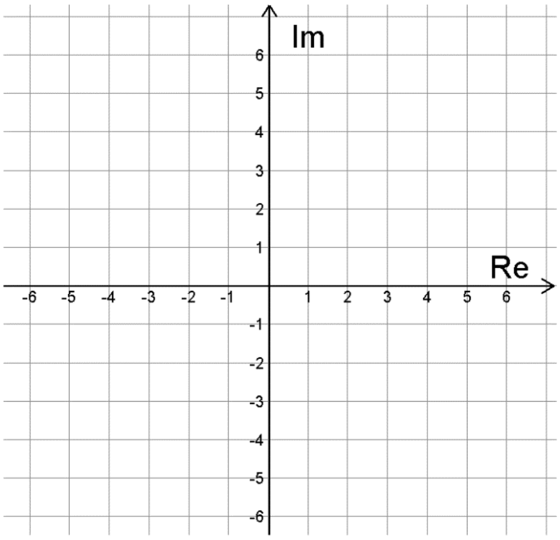
a) $z^3 - 10z^2 + 34z = 0$ (2/0/0)

b) $2z - 3\bar{z} + 6i = -4 + i$ (1/1/0)

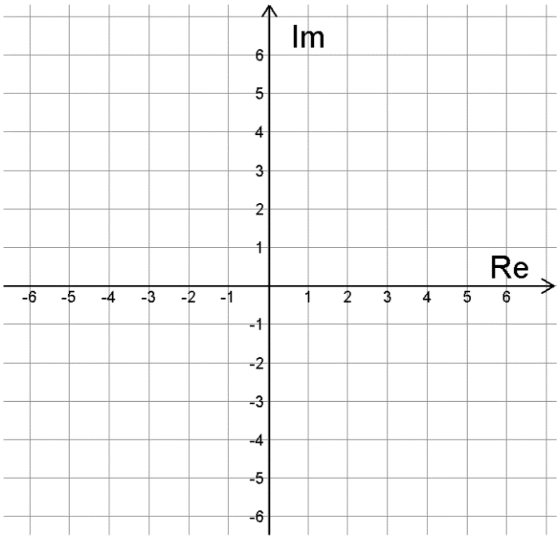
c) $2z + i\bar{z} = 10 + 11i$ (1/2/0)

d) $\dfrac{1}{z + 2\bar{z}} = 4 + 2i$ (0/1/1)

11. Markera i de komplexa talplanen nedan **samtliga** tal som uppfyller villkoret nedanför respektive talplan.



a) $Im\ z = Re\ z + 1$ (0/2/0)



b) $Im(\bar{z} \cdot i) = 3$ (0/2/0)

Del 2 – Med digitala verktyg

I dessa uppgifter är det i första hand en fråga om att själv lära sig upptäcka geometriska mönster av de fyra räknesätten för komplexa tal med hjälp av Geogebra.

Sätt ut två komplexa tal, skapa allt eftersom summor, differenser, produkter och kvoter, och flytta runt de komplexa talen för att se hur svaret rent geometriskt kan beskrivas!

D1. Undersök hur en *summa* och en *differens* kan beskrivas geometriskt i det komplexa talplanet. (2/0/0)

D2. Det finns en matematisk funktion som kallas "*abs*" (absolutbelopp). Undersök med hjälp av Geogebra vad *absolutbeloppet* innebär för ett komplext tal. (1/0/0)

D3. Det finns en matematisk funktion som kallas "*arg*" (argument) Undersök med hjälp av Geogebra vad *argumentet* innebär för ett komplext tal. (0/1/0)

D4. Undersök hur en *produkt* mellan två komplexa tal kan beskrivas geometriskt i det komplexa talplanet. (0/1/1)

D5. Undersök hur en *kvot* mellan två komplexa tal kan beskrivas geometriskt i det komplexa talplanet. (0/1/1)

D6. I den s.k. ”Mandelbrot-fraktalen” ingår de punkter, z, där *absolutbeloppet* ”inte sticker iväg” efter att beräknats enligt den upprepade beräkningen
$svaret^2 + z$ ett visst antal gånger.
Använd ditt digitala verktyg för att testa om nedanstående punkter ingår i ”Mandelbrot-fraktalen” eller inte.

$z_1 = 1$
$z_2 = -1$
$z_3 = 0{,}5i$
$z_4 = 0{,}8i$ (0/1/2)