Komplexa tal - Polär form

Varje komplext tal kan skrivas på olika former.

De två vanligaste är rektangulär form och polär form.

Rektangulär form beskriver varje tal som en kombination av reell och imaginär del

Realdel och Imaginärdel

(Dessa skrivs Re och Im)

$$z = a + bi$$

Komplexa tal betecknas ofta z

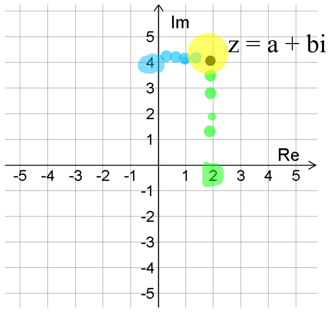
Realdel (siffran utan i)

Imaginärdel (siffran framför i)

Dessa båda delar motsvarar (x, y)-koordinaterna i det komplexa talplanet enligt

$x = \mathrm{Re}\, z$

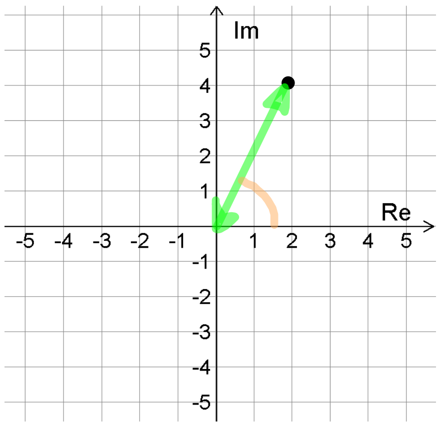
$y = \mathrm{Im}\, z$



Polär form bygger på att istället beskriva samma punkt (dvs samma tal) som att genom att utgå från origo ställa sig en viss vinkel, och gå en viss sträcka.

Talet kan då skrivas som sina polära koordinater:

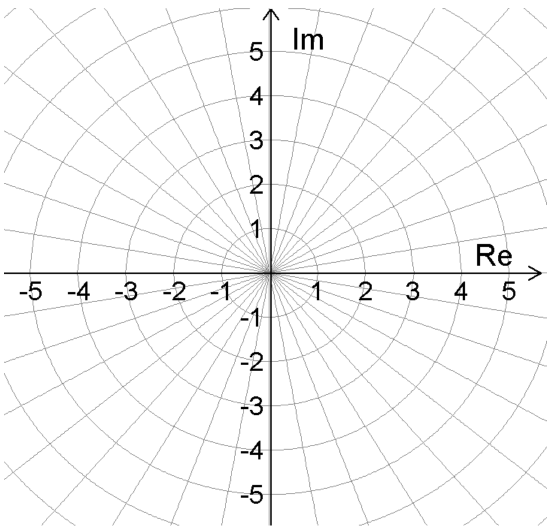
$$z = (\text{avstånd}, \text{vinkel})$$



Notera att för komplexa tal skrivna på polär form är det inte ovanligt att rutnätet i det komplexa talplanet visar polära koordinater.

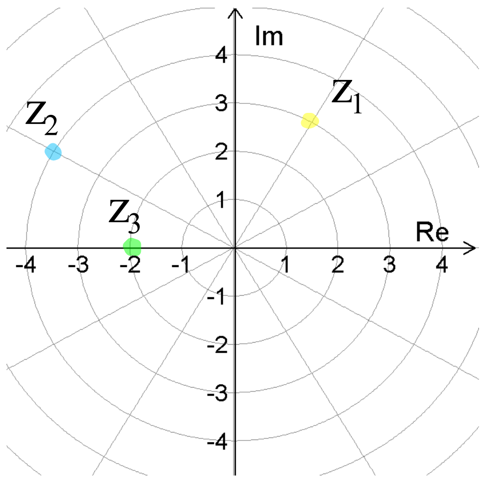
Det innebär att cirklar med centrum i origo med "vinkelstrålar" med jämna mellanrum markeringar.

Bilden visar ett sådant med en cirkel på varje heltal, och en vinkelstråle var tionde grad.



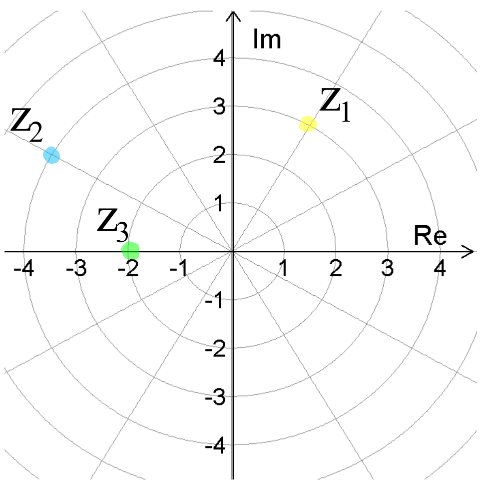
Exempel: Figuren visar ett komplext talplan med tre tal markerade.

Skriv dessa tre tal på polär form.



Lösning: Börja med att identifiera vad cirklarna och vinkelstrålarna representerar.

I detta fall:
en cirkel motsvarar avstånd varje heltal.
en vinkelstråle motsvarar 30 grader (3 stycken de första 90)



Z_1: "tredje cirkeln, 2 vinkelstrålar"

$$z_1 = (3, 60°)$$

Z_2: "fjärde cirkeln, 5 vinkelstrålar"

$$z_2 = (4, 150°)$$

Z_3: "andra cirkeln, 6 vinkelstrålar"

$$z_3 = (2, 180°)$$

Notera att avstånd ALLTID är positiva, dvs även om z_3 motsvarar talet -2 är dess avstånd +2.

Centrala begrepp

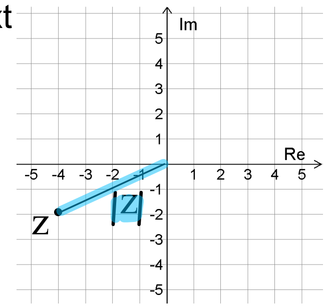
Absolut-belopp

$|Z|$

Absolutbeloppet av ett komplext tal är ett rent reellt tal.
Det beräknas mha Pythagoras sats enligt:

roten ur summan av realdelen i kvadrat och imaginärdelen i kvadrat $\Rightarrow \; |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Absolutbeloppet av ett komplext tal svarar mot talets avstånd till origo.

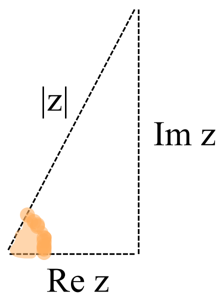


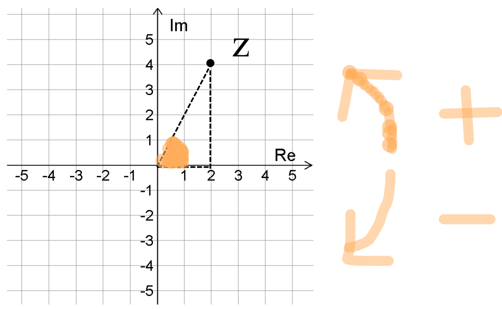
Argument

$\arg z$

Med argumentet för ett komplext tal menas den vinkel, som fås mellan talet och den positiva realdelsaxeln ("x-axeln").

Argument räknas positivt moturs, och negativt medurs, och bestäms med hjälp av trigonometri i den rätvinkliga triangel som kan skapas med hjälp av real- och imaginärdelen.





Konvertering mellan formerna

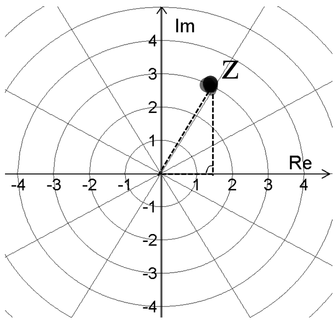
Ofta behöver man kunna konvertera ett komplext tal mellan polär form och rektangulär form och vice versa.

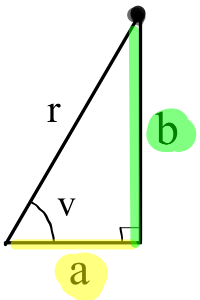
Vägen dit går via trigonometri och Pythagoras sats i den rätvinkliga triangel som fås om man ritar ut talet i ett komplext talplan.

Polär form $\longrightarrow$ **Rektangulär form**

$z = (r, v)$ $\qquad$ $z = a + bi$

"vet hypotenusan och vinkeln söker kateterna"





$a = r \cos v$

$b = r \sin v$

$z = a + bi =$

$= r \cos v + r \sin v\, i$

Detta skrivs oftast på den form som fås då r då brutits ut, dvs

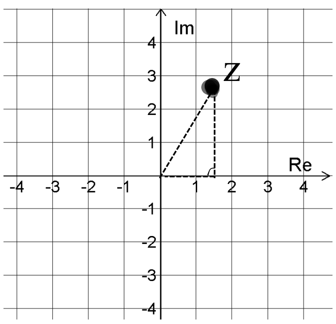
$z = r\,(\cos v + i \sin v)$

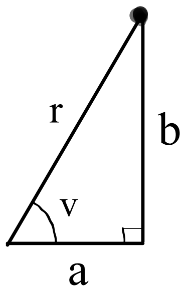
Geogebra: TillRektangulärForm( )

Rektangulär form $\longrightarrow$ **Polär form**

$z = a + bi$ $\qquad$ $z = (r, v)$

"vet kateterna söker hypotenusan och vinkeln"





$r = \sqrt{a^2 + b^2}$

$v = \tan^{-1} \frac{b}{a}$

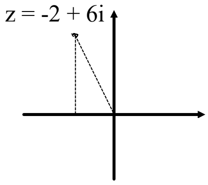
Notera att detta är vinkeln INUTI triangeln. För att få argumentet, resonera kring i vilken av de fyra kvadranterna talet ligger!

Geogebra: TillPolärForm( )

Exempel: Skriv talet $z = -2 + 6i$ på polär form

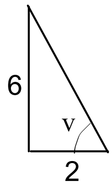
Lösning 1: "För hand"

Börja med att skissa ut talet i ett komplext talplan, med tillhörande triangel:



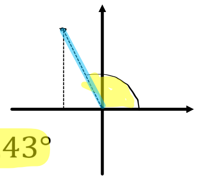
Beräkna argumentet genom att först beräkna vinkeln inuti triangeln...

$$v = \tan^{-1}\frac{6}{2} \approx 71{,}57°$$



...och därefter beräkna argumentet, dvs vinkeln från positiva Re-axeln.
I detta fall genom att ta 180 - v

$$arg\, z = 180 - v \approx 108{,}43°$$



Absolutbeloppet (= avståndet från origo) fås med Pythagoras sats:

$$|z| = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40} \approx 6{,}32$$

Med avståndet och argumentet är de båda pusselbitarna klara.

Talet skrivet i polär form blir:

$$z = (6{,}32\,;\,108{,}43°)$$

Lösning 2: Med ett färdigt Geogebra-kommando

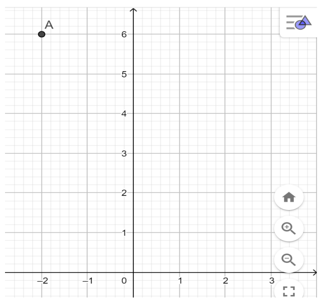
Kommandot för att omvandla till polär form heter (passande nog)

TillPolärForm

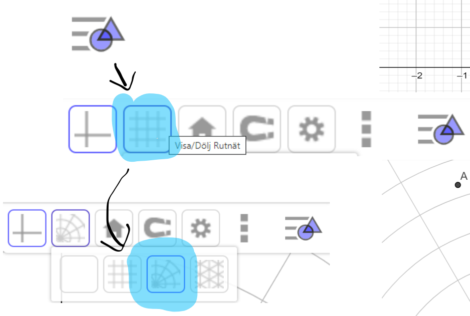
$A = \text{TillPolärForm}(-2 + 6\,i)$

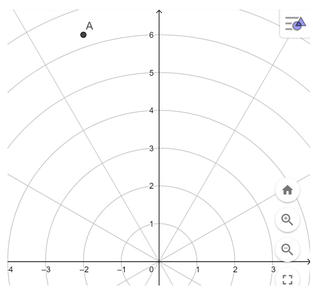
$\rightarrow\ (6.32;\ 108.43°)$

Notera att också talet ritas ut i koordinatsystemet.
(som nu ska tolkas som ett komplext talplan)



Om man vill kan man byta till Polärt koordinatsystem, via ikonen högst upp till höger:





Räkneregler vid polär form

En av de största fördelarna med att jobba med komplexa tal skrivna i polär form är att de båda räknesätten multiplikation och division blir oerhört snabba att genomföra.

Strategin är att hantera avstånden för sig och vinklarna för sig.

Vid addition och subtraktion är dock strategin att jobba i rektangulär form (se 1.1).

I dessa exempel används de två talen $z_1 = (3\,,\,40^\circ)$ och $z_2 = (2,\,10^\circ)$

Multiplikation $\cdot$

Absolutbeloppen multipliceras med varandra

Argumenten adderas med varandra

$$z_1 \cdot z_2 = (3,\,40^\circ)\cdot(2,\,10^\circ) = (3\cdot 2\,,\ 40^\circ + 10^\circ) = (6,\,50^\circ)$$

Division /

Absolutbeloppen divideras med varandra

Argumenten subtraheras med varandra

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(3,\,40^\circ)}{(2,\,10^\circ)} = \left(\frac{3}{2}\,,\,40^\circ - 10^\circ\right) = (\,1{,}5\,;\,30^\circ)$$

Exempel: Utgå från de två talen $z_1 = (\,2\,,\,60^\circ)$ och $z_2 = (\,5\,,\,20^\circ)$

Bestäm

a) $\arg\,(z_1 \cdot z_2)$

b) $|z_1{}^3|$

c) $\dfrac{z_2}{z_1}$

d) $z_2 \cdot i$

Lösning: Vid dessa typer av uppgifter - kolla alltid så att frågan besvaras.
dvs är frågan om ett argument är svaret ett vinkel,
är frågan om ett absolutbelopp, är svaret ett avstånd

är frågan däremot om ett komplext tal är svaret BÅDE avstånd och vinkel

a) $\arg\,(z_1 \cdot z_2)$

Här söks argumentet som fås efter att talen multipliceras.
Svaret kommer vara en vinkel.

Vid multiplikation adderas de ingående vinklarna.

$$\arg\,(z_1 \cdot z_2) = \arg\,(\,(\,2,\,60^\circ\,)\cdot(\,5,\,20^\circ\,)\,) = 60^\circ + 20^\circ = 80^\circ$$

b) $|z_1{}^3|$

Här söks absolutbeloppet som fås efter att $z_1 = (\,2,\,60^\circ\,)$
gångras med sig själv tre gånger.

Svaret kommer vara ett avstånd.

Vid multiplikation multipliceras de ingående avstånden.

$$|z_1{}^3| = |\,(2,\,60^\circ\,)\cdot(2,\,60^\circ\,)\cdot(2,\,60^\circ\,)\,| = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

c) $\dfrac{z_2}{z_1}$

Här söks det komplexa talet som fås efter att divisionen genomförts

Svaret kommer innehålla BÅDE avstånd OCH vinkel

Vid division divideras avstånden och vinklarna subtraheras.

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{(\,5,\,20^\circ\,)}{(\,2,\,60^\circ\,)} = \left(\,\frac{5}{2}\,,\,20^\circ - 60^\circ\,\right) = (\,2{,}5\,;\,-40^\circ\,)$$

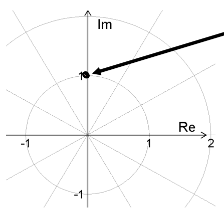
ett negativt argument innebär att vinkeln
räknas medurs när talet ritas ut

d) $z_2 \cdot i$

Här söks det komplexa talet som fås efter att multiplikationen
med i genomförts.

Svaret kommer innehålla BÅDE avstånd OCH vinkel

Problemet är att talet i är skrivet i rektangulär form.
Första steget är således att konvertera det till polär form.



Talet i har avståndet 1 och vinkeln 90°

$$z_2 \cdot i = (\,5,\,20^\circ\,)\,(\,1,\,90^\circ\,) =$$

$$(5 \cdot 1\,,\,20^\circ + 90^\circ\,) = (5,\,110^\circ)$$