FACIT

1.3 de Moivres formel

Del 1 – Utan digitala verktyg

1. Utgå från det komplexa talet $z = (2{,}150°)$

a) Bestäm $arg(z^3)$ (1/0/0)

$z^3 = (2^3, 3 \cdot 150°) = (8, 450°)$

= vinkeln = $450°$

b) Bestäm $|z^5|$ (1/0/0)

$z^5 = (2^5, 5 \cdot 150°) = (32, 750°)$

= avståndet = 32

c) Bestäm z^3 på rektangulär form. (1/1/0)

$z_3 = (2^3, 3 \cdot 150°) = (8, 450°) = [450° = 360° + 90°]$

$= (8, 90°) = 8 \cdot \cos 90° + 8 \cdot \sin 90° \cdot i$

$= \begin{bmatrix} \cos 90° = 0 \\ \sin 90° = 1 \end{bmatrix} = 8 \cdot 0 + 8 \cdot 1 \cdot i = 8i$

2. Låt $z = \cos(30°) + i \cdot \sin(30°)$ ← OBS! Avståndet 1

a) Bestäm z^5 på *polär form* (2/0/0)

$z = (1, 30°)$

$z^5 = (1^5, 5 \cdot 30°) = (1, 150°)$

b) Bestäm z^5 på *formen* $a + bi$ (1/1/0)

$z^5 = (1, 150°) = 1 \cdot \cos 150° + 1 \cdot \sin 150° \cdot i =$

$= \begin{bmatrix} \text{Tabell:} \\ \cos 150° = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin 150° = \frac{1}{2} \end{bmatrix} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i$

3. Hitta ***en*** lösning till ekvationen $z^3 = (27, 60°)$ (2/0/0)

Skrivs z på polär form gäller:

$z = (r, v) \Rightarrow z^3 = (r^3, 3 \cdot v)$

$r^3 = 27$

$r = \sqrt[3]{27} = 3$

$3 \cdot v = 60°$

$v = \frac{60°}{3} = 20°$

$z = (3, 20°)$

4. Lös ekvationen $z^4 = (16, 160°)$ genom att utgå från tänk: (2/1/0)

I) Skriv z som ett allmänt komplext tal på polär form.

II) Utför upphöjningen med hjälp av de Moivres formel

III) Jämför avstånd och vinkel mellan höger och vänsterleden, och ställ upp en ekvation för respektive.

IV) Lös de båda ekvationerna i c) för att hitta ekvationens första lösning.

V) Beräkna vinkeln mellan två lösningar, α, genom att ta $\alpha = 360°/exponenten$

VI) Ställ upp alla 4 lösningar genom att utgå från första lösningen och lägga till ett α för varje lösning.

I) $z = (r, v)$

II) $z^4 = (r^4, 4 \cdot v)$

III) Avstånd:
$r^4 = 16$

vinkel:
$4 \cdot v = 160°$

IV) $r = \sqrt[4]{16} = 2$

$v = \frac{160}{4} = 40° \Rightarrow z_1 = (2, 40°)$

V) $\alpha = \frac{360}{4} = 90°$

VI) $z_1 = (2, 40°)$ $+90°$

$z_2 = (2, 130°)$ $+90°$

$z_3 = (2, 220°)$ $+90°$

$z_4 = (2, 310°)$

5. Hitta **alla** lösningar till ekvationen $z^4 = (81, 80°)$. (2/1/0)

$z = (r, v)$ $\quad$ $z^4 = (r^4, 4 \cdot v) = (81, 80°)$

$r^4 = 81$ $\quad$ $4 \cdot v = 80°$

$r = \sqrt[4]{81} = 3$ $\quad$ $v = \frac{80}{4} = 20°$

$\alpha = \frac{360}{4} = 90°$

$z_1 = (3, 20°)$ $\quad +90°$

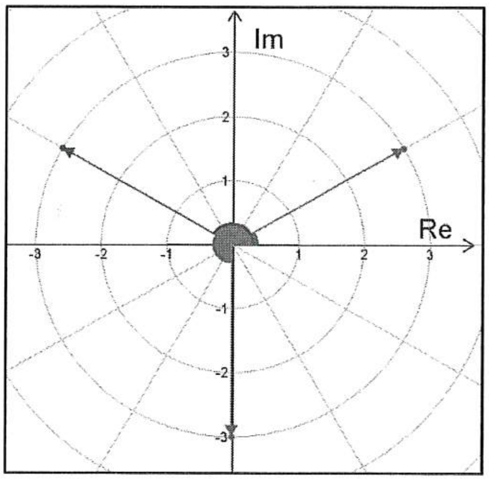
$z_2 = (3, 110°)$ $\quad +90°$

$z_3 = (3, 200°)$ $\quad +90°$

$z_4 = (3, 290°)$

6. Figuren nedan visar alla lösningar till ekvationen $z^n = w$

Använd figuren till att hitta talen n och w (1/1/0)



3 lösningar $\Rightarrow$ $n = 3$

En av lösningarna är $z_3 = -3i$

$w = z^3 = (-3i)^3 = -27i^3$

$= -27 \cdot i^2 \cdot i = [i^2 = -1]:$

$w = 27i = (27, 90°)$

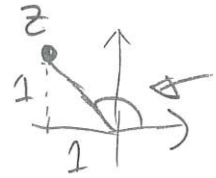
7. En lösning till ekvationen $z^6 = w$ är $z = 2{,}2 \cdot (\cos(36°) + i \cdot \sin(36°))$
Ange en valfri annan lösning till ekvationen. (0/1/0)

Alla lösningar har samma avstånd $\Rightarrow$ $r = 2{,}2$

upphöjt till 6 $\Rightarrow$ $\alpha = \frac{360°}{6} = 60°$ $\Rightarrow$ Det skiljer 60° mellan lösningarna

ex: $z = (2{,}2;\ 96°)$

8. Bestäm z^4 om $z = -1 + i$ $=$ (1/2/0)



$\left[\arg z = 135^\circ \quad |z| = \sqrt{2} \right]$

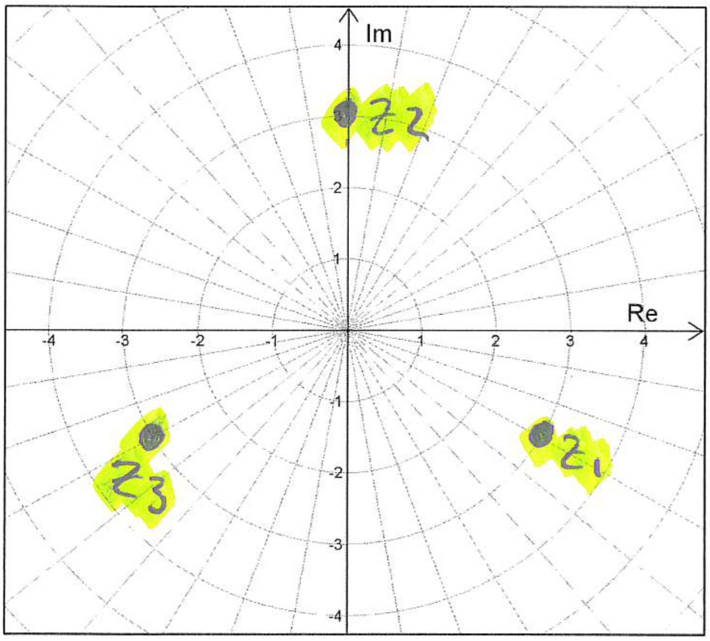
$z^4 = \left[\begin{array}{l}\text{Skriv } z \text{ på} \\ \text{polär form}\end{array}\right] = (\sqrt{2}, 135^\circ)^4 = (\sqrt{2}^4, 4 \cdot 135^\circ) =$

$= (4, 540^\circ) = \left[540^\circ = 360^\circ + 180^\circ \right] =$

$= (4, 180^\circ) = 4 \cdot \cos 180^\circ + 4 \cdot \sin 180^\circ \cdot i$

$= \left[\begin{array}{l}\cos 180^\circ = -1 \\ \sin 180^\circ = 0\end{array}\right] = 4 \cdot (-1) + 4 \cdot 0 \cdot i = -4$

9. Markera lösningarna till ekvationen $z^3 + 27i = 0$ i det komplexa talplanet nedan. (1/2/0)



$z^3 + 27i = 0$

[Flytta över $27i$]

$z^3 = -27i$

[Skriv om $-27i$ till polär form]

$z^3 = (27, -90^\circ)$

$r^3 = 27 \qquad 3 \cdot v = -90^\circ$

$r = \sqrt[3]{27} = 3 \qquad v = \frac{-90}{3} = -30^\circ$

$\alpha = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$

$z = (r, v) \Rightarrow z^3 = (r^3, 3 \cdot v)$

$z_1 = (3, -30^\circ)$ $+120^\circ$

$z_2 = (3, 90^\circ)$ $+120^\circ$

$z_3 = (3, 210^\circ)$

10. Lös uppgiften nedan (0/2/0)

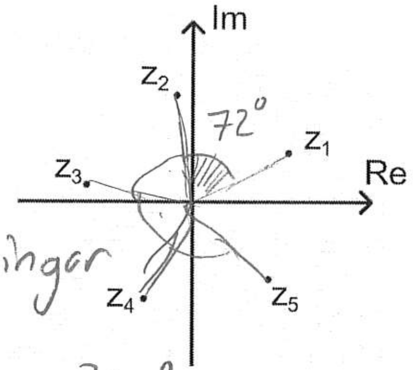
Figuren visar lösningarna till ekvationen

$z^n = w$

där

$z_2 = 3(\cos(100^\circ) + i\sin(100^\circ))$

Bestäm z_5 på polär form



Samma avstånd på alla lösningar

$\Rightarrow r = 3$

Vinkel mellan 2 lösningar $= \alpha = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$

Vinkel hos $z_5 = 100^\circ + 3 \cdot 72^\circ = 316^\circ \Rightarrow z_5 = (3, 316^\circ)$

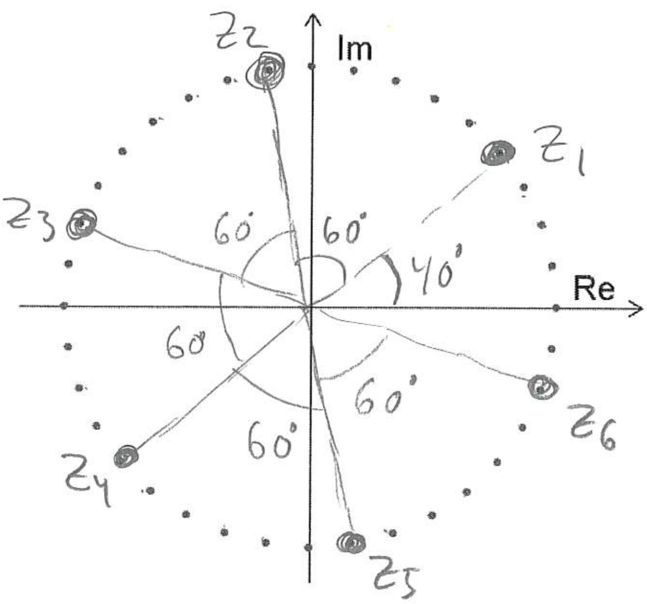
11. Figuren nedan visar 36 punkter jämnt fördelade i en cirkel med radien $\sqrt[12]{20}$ i ett komplext talplan.

a) Bland punkterna finns samtliga lösningar till ekvationen $z^6 = w$ där $arg(w) = 240^\circ$

Markera dessa punkter. (0/2/0)

$(r^6, 6 \cdot v) = (\quad , 240^\circ) \Rightarrow 6 \cdot v = 240^\circ$

$v = \frac{240^\circ}{6} = 40^\circ$



Vinkel mellan =

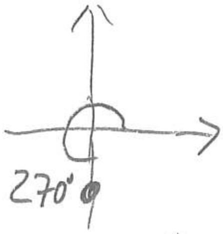
$\alpha = \frac{360}{6} = 60^\circ$

b) Bestäm talet w (0/1/0)

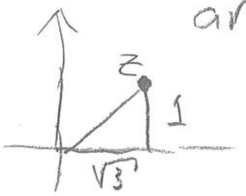
$w = z^6 = (\sqrt[12]{20}, 40^\circ)^6 = ((\sqrt[12]{20})^6, 6 \cdot 40^\circ)$

$= (\sqrt{20}, 240^\circ)$

12. Bestäm de värden på n som uppfyller $Re\,(\sqrt{3}+i)^n = 0$ (0/0/2)

$Re(\ ) = 0 \Rightarrow$  el 

Skriv $(\sqrt{3}+i)$ på polär form:



$\arg z = 30°$ enl. tabell

$|z| = 2$

$(2, 30°)^n = (2^n, n \cdot 30°)$

Söker de n som gör att $Re = 0$

$\Rightarrow n_1 30° = 90° \quad n_1 = 3 \qquad n_2 \cdot 30° = 270° \quad n_2 = 9 \Rightarrow$ $n = \ldots 3, 9, \ldots = 3 + 6 \cdot m$ där m är ett heltal

13. Uppgiften nedan är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften.

Ekvationen $z^p = i$ ska undersökas för olika värden på heltalet p.
För vissa värden på heltalet p är $z_1 = \cos 9° + i \sin 9°$ en lösning till ekvationen $z^p = i$

a) Visa att detta gäller för $p = 50$, det vill säga visa att z_1 är en lösning till $z^{50} = i$ (0/2/0)

b) Bestäm alla heltalsvärden på p för vilka z_1 är en lösning till ekvationen $z^p = i$ (0/0/2)

a) $z_1 = \cos 9° + i \cdot \sin 9° = (1, 9°)$

Vill visa att $z_1^{50} = i \Rightarrow (1, 9°)^{50} = (1^{50}, 9 \cdot 50°) =$

$= (1, 450°) = [450° = 360 + 90°] =$

$= (1, 90°) = 1 \cdot \cos 90° + 1 \cdot \sin 90° \cdot i$

$= \begin{bmatrix} \cos 90° = 0 \\ \sin 90° = 1 \end{bmatrix} = 0 + 1 \cdot i = i$ VSV.

b) $(1, 9°)^p = (1, 90°) \Rightarrow (1^p, 9 \cdot p) = (1, 90°)$

$9 \cdot p = 90° + n \cdot 360 \Rightarrow p = 10 + n \cdot 40$

14. Lös ekvationen $z^5 + i \cdot z^5 = i$ (0/0/3)

$z^5 + i \cdot z^5 = i$ [Bryt ut z^5]

$z^5(1+i) = i$ [Dela med $1+i$]

$z^5 = \frac{i}{1+i}$ [Skriv om på polär form]

$i = (1, 90°)$ $1+i = (\sqrt{2}, 45°)$

$= \frac{(1, 90°)}{(\sqrt{2}, 45°)}$

$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 45°\right)$

Lös ekv. $z^5 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 45°\right)$ enl. "standard-tänket"

$(r^5, 5 \cdot v) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 45°\right)$

$r^5 = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow r = \frac{1}{\sqrt[10]{2}}$ $5 \cdot v = 45° \Rightarrow v = 9°$

$\alpha = \frac{360}{5} = 72°$

$z_1 = \left(\frac{1}{\sqrt[10]{2}}, 9°\right)$ $+72°$

$z_2 = \left(\frac{1}{\sqrt[10]{2}}, 81°\right)$ $+72°$

$z_3 = \left(\frac{1}{\sqrt[10]{2}}, 153°\right)$ $+72°$

$z_4 = \left(\frac{1}{\sqrt[10]{2}}, 225°\right)$ $+72°$

$z_5 = \left(\frac{1}{\sqrt[10]{2}}, 297°\right)$