Komplexa tal - de Moivres formel

de Moivres formel är egentligen mest ett resultat av räknereglerna för multiplikation vid komplexa tal skrivna i polär form.

Multiplikation

Absolutbeloppen multipliceras

Argumenten adderas

Exempel: $(3, 20^\circ)\cdot(4, 50^\circ) = (3\cdot 4\ ,\ 20^\circ + 50^\circ) = (12, 70^\circ)$

"Upphöjt till" är egentligen bara upprepad multiplikation, vilket innebär att t.ex

$(3, 20^\circ)^4$ motsvarar $(3, 20^\circ)\cdot(3, 20^\circ)\cdot(3, 20^\circ)\cdot(3, 20^\circ) = (3\cdot 3\cdot 3\cdot 3,\ 20^\circ+20^\circ+20^\circ+20^\circ)$

Kombineras dessa båda saker för ett generellt komplext tal, z, skrivet i polär form fås de Moivres formel:

$$(\,|z|, \arg z\,)^n = (\,\underbrace{|z|\,|z|\,\ldots\,|z|}_{\text{n st}}\ ,\ \underbrace{\arg z + \arg z + \ldots + \arg z}_{\text{n st}}\,) = (\,|z|^n\ ,\ \underbrace{n\cdot\arg z}_{\text{"n stycken arg z"}}\,)$$

"Om ett komplext tal skrivet i polär form höjs upp med n kommer svaret bli ett komplext tal vars absolutbelopp fås som ursprungstalets upphöjt med n, och vars argument fås som ursprungstalets gångrat med n"

$$\boxed{(\,|z|, \arg z\,)^n = (\,|z|^n\ ,\ n\cdot\arg z\,)}$$

Exempel: För talet z gäller att $z = 2(\cos(40^\circ) + i\cdot\sin(40^\circ))$

Bestäm z^5

Lösning: Skrivsättet $z = 2(\cos(40^\circ) + i\cdot\sin(40^\circ))$

innehåller information om såväl avstånd som vinkel, enligt:

$$z = 2(\cos(40^\circ) + i\cdot\sin(40^\circ))$$

Absolutbeloppet
$|z| = 2$

Argumentet
$\arg z = 40^\circ$

Således kan z också skrivas $z = (2, 40^\circ)$

$z^5 = (2, 40^\circ)^5 = (2^5, 5\cdot 40^\circ) = (32, 200^\circ)$

de Moivres formel:

"avståndet höjs upp, vinkeln gångras"

Ekvationer av typen $z^n = w$

Inom ekvationslösning av potensekvationer med heltalsexponenter gäller en viktig princip - nämligen att ekvationen har lika många lösningar som exponenten.

Exempelvis

$z^5 = 1$ → upphöjt till 5 → 5 st lösningar

$z^3 = 2 + i$ → upphöjt till 3 → 3 st lösningar

$z^7 = (4, 20^\circ)$ → upphöjt till 7 → 7 st lösningar

För att hitta dessa lösningar gäller följande strategi:

I Skriv om högerledet på polär form

II Använd tänket med de Moivres formel fast baklänges för att hitta första lösningen

III Lösningarna på dessa ekvationer är alltid symmetriskt placerade kring origo - alla har samma avstånd, men vinkeln varierar.

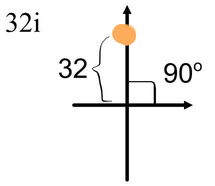
Ta fram vinkeln mellan lösningarna, α , genom tänket:

$$\alpha = \frac{360^\circ}{\text{antal lösningar}}$$

IV Ta fram de återstående lösningarna genom att utgå från första lösningen och sedan successivt lägga till vinkeln mellan.

Exempel: Hitta alla lösningar till ekvationen $z^5 = 32i$

Lösning: I Skriv om högerledet på polär form



$\Rightarrow (32, 90°)$

II Använd tänket med de Moivres formel fast baklänges för att hitta första lösningen

$z^5 = (32, 90°)$

Anta att z är ett komplext tal med avståndet r och vinkeln v
Då gäller att:

de Moivres formel

$(r, v)^5 = (32, 90°)$

"avståndet höjs upp, vinkeln gångras"

$(r^5, 5v) = (32, 90°)$

Jämför nu avstånden för sig,
och vinklarna för sig.

$r^5 = 32 \longrightarrow r = \sqrt[5]{32} = 2$

$5v = 90° \longrightarrow v = 90°/5 = 18°$

Den första lösningen till ekvationen är

$z_1 = (2, 18°)$

III Ta fram vinkeln mellan lösningarna, α, genom tänket:

$$\alpha = \frac{360°}{\text{antal lösningar}}$$

Eftersom det är upphöjt till 5 finns fem lösningar.
Således blir vinkeln mellan två lösningar:

$$\alpha = \frac{360°}{5} = 72°$$

IV Ta fram de återstående lösningarna genom att utgå från första lösningen och sedan successivt lägga till vinkeln mellan.

Första lösningen: $z_1 = (2, 18°)$

Vinkeln mellan: $\alpha = 72°$

Alla lösningar:

$z_1 = (2, 18°)$
+ 72°
$z_2 = (2, 90°)$
+ 72°
$z_3 = (2, 162°)$
+ 72°
$z_4 = (2, 234°)$
+ 72°
$z_5 = (2, 306°)$

Grafisk tolkning av lösningarna till ekvationer av typen $z^n = w$

För de komplexa talen z som löser ekvationer av typen $z^n = w$ gäller:

Antal lösningar är detsamma som exponenten, n

Alla lösningar är symmetriskt placerade på en cirkel kring origo.

Exempel:
I det komplexa talplanet till höger visas lösningarna till ekvationen

$z^3 = (27, 50°)$

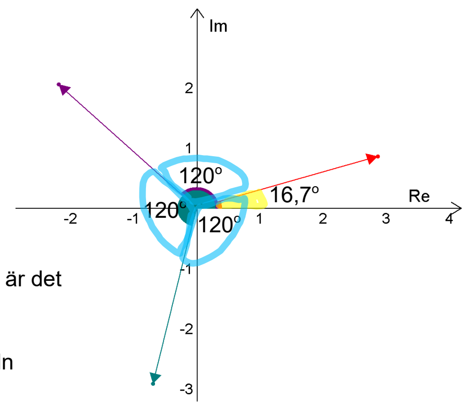
För dessa gäller:

De är totalt 3 stycken

Alla har avståndet $\sqrt[3]{27} = 3$

Mellan 2 närliggande lösningar är det
360 / 3 = 120°

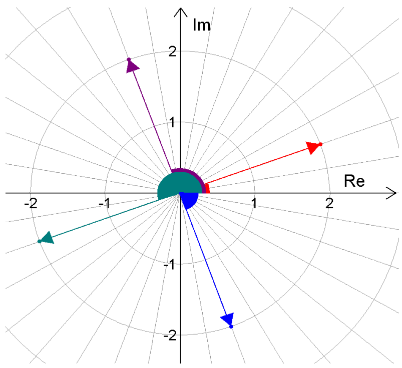
Den första lösningen har vinkeln
50° / 3 ≈ 16,7°



Exempel:

Figuren visar ett komplext talplan med alla lösningar på en ekvation.

Ange ekvationen.



Lösning: Alla lösningar ligger symmetriskt placerade kring origo. $\Longrightarrow$ Ekvationen har formen $z^n = w$

Antal lösningar är fyra stycken $\Longrightarrow$ $n = 4$

En av lösningarna är
$z = (2, 20°)$
Höjs den upp med 4 fås:
$(2^4, 4 \cdot 20°) = (16, 80°)$ $\Longrightarrow$ $w = (16, 80°)$

OBS! Det blir samma svar för vilken lösning man än väljer, efter att man tagit bort 360° från vinkeln

Ekvationen vars lösningar syns i bilden är

$$z^4 = (16, 80°)$$

som också kan skrivas...

$$z^4 = 16 \cdot (\cos 80° + i \cdot \sin 80°)$$

Upphöjningar vid rektangulär form

Om ett tal skrivet i rektangulär form ska höjas upp med en exponent som är större än 2 tenderar det snabbt bli väldigt krånglig algebra.

Exempelvis $(1 + i)^3 = (1 + i)(1 + i)(1 + i)$

...vilket blir jobbigt att utveckla.

Knepet är att istället skriva om talet som ska höjas upp till polär form innan upphöjningen sker, genomföra upphöjningen och sedan konvertera slutsvaret tillbaka till rektangulär form.

Rektangulär form som ska höjas upp → Skriv om talet i polär form → Genomför upphöjningen → Gå tillbaka till rektangulär form →

$(1 + i)^3$ → $(\sqrt{2}, 45^\circ)^3$ → $(\sqrt{2}^3, 135^\circ)$ → $\sqrt{2}^3\,(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ)$

→ Använd formelbladets tabell för att hitta exakta värden på $\cos$ och $\sin$ →

Exakta värden

Vinkel v (grader) (radianer)	0° 0	30° $\frac{\pi}{6}$	45° $\frac{\pi}{4}$	60° $\frac{\pi}{3}$	90° $\frac{\pi}{2}$	120° $\frac{2\pi}{3}$	135° $\frac{3\pi}{4}$	150° $\frac{5\pi}{6}$	180° π
$\sin v$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos v$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan v$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Ej def.	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

$$\sqrt{2}^3 \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

→ Gångra in avståndet och förenkla så långt som möjligt.

$$-\frac{\sqrt{2}^3}{\sqrt{2}} + i \frac{\sqrt{2}^3}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}^2 + i\sqrt{2}^2 = -2 + 2i$$

Alltså gäller: $(1 + i)^3 = -2 + 2i$

...vilket kan bekräftas av Geogebra om man har tillgång till digitala verktyg

$z_1 = (1 + i)^3$

$\rightarrow -2 + 2i$