Radianer

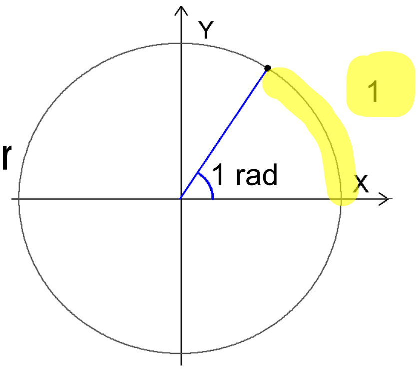
Radianer är inte kopplat specifikt till komplexa tal, men används bland annat i komplexa tal (och under resten av kursen), och har således sin plats här.

Radianer är en enhet för vinklar.

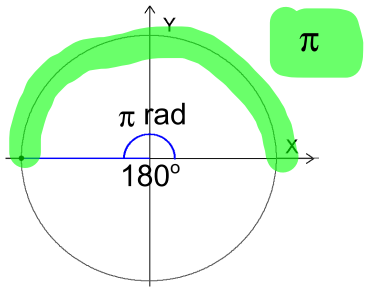
Det finns redan en sådan enhet - nämligen grader - men det visar sig praktiskt att definera en annan enhet, som inte bygger på siffran 360 utan snarare på egenskaper hos enhetscirkeln.

Definition av radian

1 radian är den vinkel som i enhetscirkeln ger båglängden 1.



Definitionen ovan ger att vinkeln i radianer alltid motsvarar båglängden i enhetscirkeln och sambandet mellan grader och radianer fås genom att utgå från ett halvt varv



Alltså gäller: $180^\circ = \pi$ rad

vilket kan skrivas... $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ rad eller $\frac{180^\circ}{\pi} = 1$ rad

På formelbladets tabell med exakta värden hittas några vinklar skrivna i både grader och radianer. Bland annat just att $180^\circ = \pi$ rad

Notera dock att man oftast utelämnar enheten "rad" och istället lämnar tomt.

Exakta värden

Vinkel v									
(grader)	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
(radianer)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin v$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos v$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan v$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Ej def.	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

August 19, 2020

Exempel: Omvandla mellan grader och radianer. Svara exakt!

a) $30°$

b) $\frac{\pi}{18}$ rad

Lösning: Konverteringen sker alltid via att multiplicera med en kvot mellan 180 och π. Det gäller bara att hålla koll på vad som är täljare och nämnare.

Här kommer två minnesregler:

1 "GRAD är större än rad"

om något litet ska bli stort ska man gångra med ett stort tal, och vice versa

rad		GRAD
liten	$\xrightarrow{\frac{180}{\pi}}$	STOR
liten	$\xleftarrow{\frac{\pi}{180}}$	STOR

a) $30°$

"har den stora (GRAD), vill ha den lilla (rad)" $\longrightarrow \cdot\frac{\pi}{180}$

$$30 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{30\pi}{180} = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

b) $\frac{\pi}{18}$

"har den lilla (rad), vill ha den stora (GRAD)" $\longrightarrow \cdot\frac{180}{\pi}$

$$\frac{\pi}{18} \cdot \frac{180}{\pi} = \frac{180\,\pi}{18} = 10°$$

2 "Radianer innebär att lägga till pi"

ska man till radianer, finns pi:et i täljaren, och vice versa.

a) $30°$

"från grader till radianer - LÄGG TILL pi" $\longrightarrow \cdot\frac{\pi}{180}$

$$30 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{30\pi}{180} = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

b) $\frac{\pi}{18}$

"från radianer till grader - DELA BORT pi" $\longrightarrow \cdot\frac{180}{\pi}$

$$\frac{\pi}{18} \cdot \frac{180}{\pi} = \frac{180\,\pi}{18} = 10°$$

Svar: a) $30° = \frac{\pi}{6}$

b) $\frac{\pi}{18} = 10°$

Notera att oftast utelämnas enheten på radianer.

Ekvationer av typen $z^n = w$ - med radianer

Oavsett vinkelmått är teorin densamma. För dessa ekvationer gäller:

Antal lösningar är detsamma som exponenten, n. De fås via tänket:

I Skriv om högerledet på polär form

II Använd tänket med de Moivres formel fast baklänges för att hitta första lösningen

III Lösningarna på dessa ekvationer är alltid symmetriskt placerade kring origo - alla har samma avstånd, men vinkeln varierar.

Ta fram vinkeln mellan lösningarna, α, genom tänket:

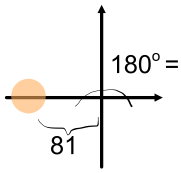
$$\alpha = \frac{2\pi}{\text{antal lösningar}}$$

IV Ta fram de återstående lösningarna genom att utgå från första lösningen och sedan successivt lägga till vinkeln mellan.

Exempel: Hitta alla lösningar till ekvationen $z^4 = -81$
med argumenten i radianer

Lösning: I Skriv om högerledet på polär form

-81



$\Longrightarrow (81, \pi)$

II Använd tänket med de Moivres formel fast baklänges
för att hitta första lösningen

$z^4 = (81, \pi)$

Anta att z är ett komplext tal med avståndet r och vinkeln v
Då gäller att:

de Moivres formel

"avståndet höjs upp,
vinkeln gångras"

$(r, v)^4 = (81, \pi)$

$(r^4, 4v) = (81, \pi)$

Jämför nu avstånden för sig,
och vinklarna för sig.

$r^4 = 81 \longrightarrow r = \sqrt[4]{81} = 3$

$4v = \pi \longrightarrow v = \dfrac{\pi}{4}$

Den första lösningen till ekvationen är

$z_1 = \left(3, \dfrac{\pi}{4}\right)$

III Ta fram vinkeln mellan lösningarna, α , genom tänket:

$$\alpha = \frac{2\pi}{\text{antal lösningar}}$$

Eftersom det är upphöjt till 4 finns fyra lösningar.
Således blir vinkeln mellan två lösningar:

$$\alpha = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

IV Ta fram de återstående lösningarna genom att utgå från första
lösningen och sedan successivt lägga till vinkeln mellan.

Första lösningen: $z_1 = (3, \quad)$

Vinkeln mellan: $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$

Alla lösningar:

$z_1 = \left(3, \dfrac{\pi}{4}\right)$

$+\dfrac{\pi}{2}$

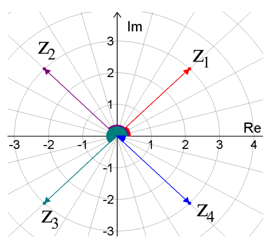
$z_2 = \left(3, \dfrac{3\pi}{4}\right)$

$+\dfrac{\pi}{2}$

$z_3 = \left(3, \dfrac{5\pi}{4}\right)$

$+\dfrac{\pi}{2}$

$z_4 = \left(3, \dfrac{7\pi}{4}\right)$



Notera att det också går att först räkna allting i
grader, och sedan konvertera slutsvaren.