FACIT 1.7

~~1.6~~ Faktorsatsen och restsatsen

Del 1 – Utan digitala verktyg

1. För fjärdegradspolynomet p gäller att nollställena är $x = -2$, $x = 1$, $x = 2$, och $x = 3$. Siffran framför x^4-termen är 1

a) Skriv p på faktorform. (1/0/0)

Varje faktor ges av "(x − nollstället)"

$$p(x) = (x+2)(x-1)(x-2)(x-3)$$

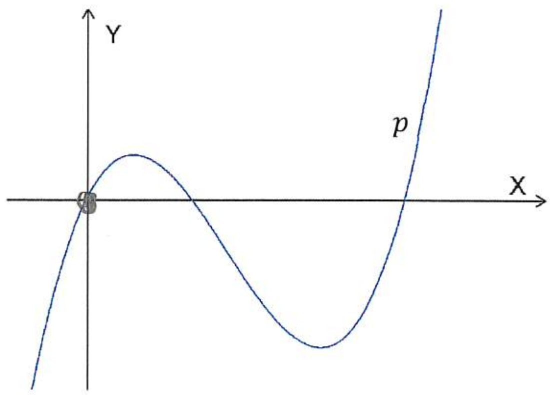
b) Divisionen $\dfrac{p}{x+2}$ kommer ge ett nytt polynom som svar. Skriv detta polynom på *faktorform* (1/0/0)

$$\frac{p}{x+2} = \frac{(x+2)(x-1)(x-2)(x-3)}{(x+2)} = \left[\text{Stryk } (x+2)\right] =$$

$$= (x-1)(x-2)(x-3)$$

2. Till höger visas grafen till $p(x) = 2x^3 - 8x^2 + 6x$

Bestäm de tre nollställena till p (3/0/0)



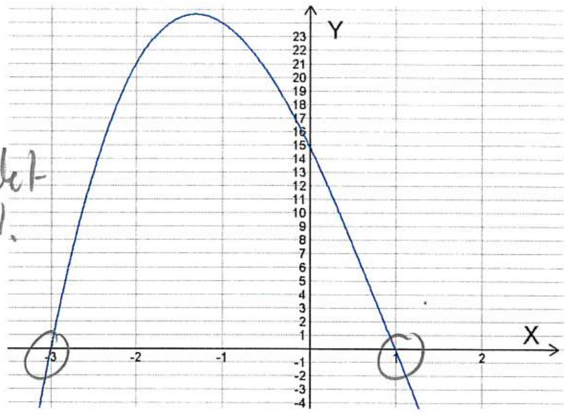
$$p(x) = 2x^3 - 8x^2 + 6x$$

$$= 2x(\underbrace{x^2 - 4x + 3}_{pq}) = \left[\begin{array}{l} pq:\ x^2 - 4x + 3 = 0 \\ x = 2 \pm \sqrt{4-3} = 2 \pm 1 \\ x_1 = 3 \quad x_2 = 1 \end{array}\right]$$

$$= 2x(x-3)(x-1)$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad x_2 = 3 \quad x_3 = 1$$

3. Grafen till höger visar delar av grafen till funktionen
$p(x) = x^3 - 3x^2 - 13x + 15$



a) Av grafen syns att det finns två möjliga nämnare som kommer ge $\boxed{\text{resten noll}}$ $\Rightarrow$ y-värdet noll. om p delas med dessa.
Vilka två nämnare är det? (2/0/0)

Nollställen enl. grafen: $x = -3$, $x = 1$

$x = -3 \Rightarrow (x+3)$

$x = 1 \Rightarrow (x-1)$

b) Lös ekvationen $p(x) = 0$ (2/1/0)

$p(x) = x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = (x+3)(x-1) =$

$= [\text{Gångra ihop}] = x^2 + 2x - 3$

$$\frac{p(x)}{x^2+2x-3} \Rightarrow \left[\begin{array}{l|l} \quad x - 5 & \\ \hline x^3 - 3x^2 - 13x + 15 & x^2 + 2x - 3 \\ x^3 + 2x^2 - 3x & \\ \hline 0 \;\; -5x^2 - 10x + 15 & \\ \quad\; -5x^2 - 10x + 15 & \\ \hline \qquad\quad 0 & \end{array}\right] = (x - 5) \Rightarrow x = 5$$

$x_1 = -3 \quad x_2 = 1$

$x_3 = 5$

4. Bestämt talet a så att divisionen $\dfrac{x^3 + 4x^2 - 2x + a}{x - 1}$ får resten noll. (0/1/0)

Använd antingen polynomdivision eller restsatsen:

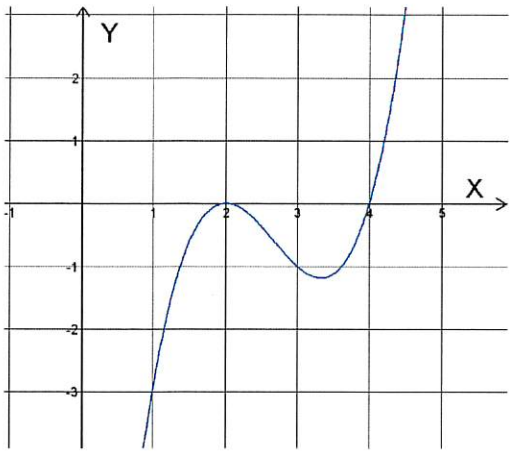
Restsatsen: 1) Nämnaren $= 0 \Rightarrow x - 1 = 0$
$x = 1$

2) Beräkna motsvarande värde i täljaren $\Rightarrow 1^3 + 4 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + a$
$= 3 + a$

"Resten noll" $\Rightarrow 3 + a = 0$

$a = -3$

5. Figuren visar grafen till funktionen $p(x) = x^3 - 8x^2 + 20x - 16$



Bestäm resten vid divisionen $\dfrac{x^3 - 8x^2 + 20x - 16}{x - 1}$...

a) ...med restsatsen (1/0/0)

Nämnaren $= 0 \Rightarrow x = 1$

Resten = Täljarens motsvarande värde $= 1^3 - 8 \cdot 1^2 + 20 \cdot 1 - 16 = -3$

b) ...genom att läsa av grafen (1/0/0)

Läs av grafen vid det x som ger nämnaren noll, dvs vid $x = 1 \Rightarrow$ Resten $= -3$

c) ...med polynomdivision (1/1/0)

$x^2 - 7x - 13$

$x^3 - 8x^2 + 20x - 16 \quad \boxed{x - 1}$

$x^3 - x^2$

$0 - 7x^2 + 20x - 16$

$-7x^2 + 7x$

$0 - 13x - 16$

$-13x - 13$

$0 \quad -3$

Resten $= -3$

d) Ange en nämnare som med samma täljare skulle ge *resten noll*. (1/0/0)

Resten noll ges av faktorerna $\Rightarrow$

Faktorerna ges av nollställena $\Rightarrow$

$x_{1,2} = 2 \Rightarrow (x-2)$ eller

$x_3 = 4 \Rightarrow (x-4)$

6. Polynomet $p(x) = x^4 - 10x^3 + 28x^2 - 40x + 96$
kan skrivas $p(x) = (x^2 + 4) \cdot q(x)$ där q är ett andragradspolynom

a) Bestäm resten vid division med $(x - 1)$ (0/1/0)

Restsatsen: Resten ges av täljarens värde där $x=1$

$\Rightarrow 1^4 - 10 \cdot 1^3 + 28 \cdot 1^2 - 40 \cdot 1 + 96 = 1 - 10 + 28 - 40 + 96$
$= 125 - 50 = 75$

b) Bestäm andragradspolynomet q (0/2/0)

$$\frac{p}{x^2+4} = \left[\begin{array}{l|l} \multicolumn{1}{c}{x^2 - 10x + 24} & \\ \hline x^4 - 10x^3 + 28x^2 - 40x + 96 & x^2+4 \\ \underline{x^4 \qquad\quad + 4x^2} & \\ 0 - 10x^3 + 24x^2 - 40x + 96 & \\ \quad \underline{-10x^3 \qquad\quad - 40x} & \\ \quad 0 \quad + 24x^2 + 0 + 96 & \\ \qquad\quad \underline{24x^2 \qquad + 96} & \\ \qquad\quad 0 \qquad\quad 0 & \end{array}\right] = x^2 - 10x + 24$$

7. $p(x) = x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 14x - 8$ har en dubbelrot vid $x = 1$.

Den givna informationen säger att det finns två olika nämnare som skulle ge resten noll.

Vilka är dessa två nämnare? (1/1/0)

Dubbelrot vid $x = 1 \Rightarrow$ Två faktorer är
$(x-1)(x-1)$

Det innebär att division
med $(x-1)$ ensamt eller med båda
samtidigt ger resten noll
dvs: $(x-1)$
$(x-1)(x-1) = (x^2 - 2x + 1)$

8. $p(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6$ har de två nollställena $x = \pm 1$.

a) Visa att både $x_1 = 1$ och $x_2 = -1$ är nollställen. (2/0/0)

"Nollställen" ⇒ Ger svaret noll

$x = 1 \Rightarrow p(1) = 1^4 - 5 \cdot 1^3 + 5 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 - 6 = 0$ vsv

$x = -1 \Rightarrow p(-1) = (-1)^4 - 5 \cdot (-1)^3 + 5 \cdot (-1)^2 + 5 \cdot (-1) - 6 =$

$= +1 + 5 + 5 - 5 - 6 = 0$ vsv

b) Bestäm de övriga två nollställena. (1/2/0)

$p(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = (x-1)(x+1)(\ ?\ ) = (x^2-1) \cdot (?)$

$\Rightarrow (?) =$

$$\begin{array}{l} x^2 - 5x + 6 \\ \hline x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 \quad \boxed{x^2 - 1} \\ x^4 \qquad\quad - x^2 \\ \hline 0 - 5x^3 + 6x^2 + 5x - 6 \\ \quad -5x^3 \qquad + 5x \\ \hline \quad 0 + 6x^2 + 0 - 6 \\ \qquad 6x^2 - 6 \\ \hline \qquad\quad 0 \end{array}$$

$\Rightarrow (?) = x^2 - 5x + 6$

pq: $x^2 - 5x + 6 = 0$

$x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{24}{4}} =$

$= \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2} \Rightarrow x_3 = 3$

$x_4 = 2$

9. Polynomet $p(x) = x^5 - 4x^4 - 5x^3 + 20x^2 + 4x - 16$ har rötterna $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 2, x_4 = -2$

Bestäm den sista roten. (~~1~~2/~~1~~2/0)

$x = 1 \Rightarrow (x-1)$

$x = -1 \Rightarrow (x+1)$

$x = 2 \Rightarrow (x-2)$

$x = -2 \Rightarrow (x+2)$

Femtegradspolynom

$\Rightarrow 5$ faktorer : $p(x) = \underbrace{(x-1)(x+1)}\underbrace{(x-2)(x+2)}(?)$

$(x^2-1) \cdot (x^2-4) \cdot (?)$

Antingen delas p(x) två gånger.
Först med (x^2-1) och sedan (x^2-4)
eller så gångras dessa ihop och p(x) delas med
svaret. $(x^2-1) \cdot (x^2-4) = x^4 - 4x^2 - 1x^2 + 4 = x^4 - 5x^2 + 4$

$$\begin{array}{l} x - 4 \\ \hline x^5 - 4x^4 - 5x^3 + 20x^2 + 4x - 16 \quad \boxed{x^4 - 5x^2 + 4} \\ x^5 \qquad\quad - 5x^3 \qquad\quad + 4x \\ \hline 0 \ -4x^4 \quad 0 + 20x^2 \quad 0 - 16 \\ \ \ -4x^4 \qquad + 20x^2 \qquad - 16 \\ \hline \quad 0 \qquad\qquad 0 \qquad\qquad 0 \end{array}$$

$\Rightarrow (?) = (x-4)$

$\Rightarrow$ Sista nollstället $x_5 = 4$

10. I uppgift 7 sas att $p(x) = x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 14x - 8$ har en dubbelrot vid $x = 1$.

Bestäm de övriga två nollställena. (0/3/0)

Dubbelrot vid $x=1$ $\Rightarrow (x-1)\cdot(x-1) = (x^2-2x+1)$

$\frac{p(x)}{x^2-2x+1} =$

x^2-2x-8

$x^4-4x^3-3x^2+14x-8 \quad \boxed{x^2-2x+1}$

$x^4-2x^3+x^2$

$0 \quad -2x^3-4x^2+14x-8$

$-2x^3+4x^2-2x$

$0 \quad -8x^2+16x-8$

$-8x^2+16x-8$

$0 \quad 0 \quad 0$

$= x^2-2x-8$

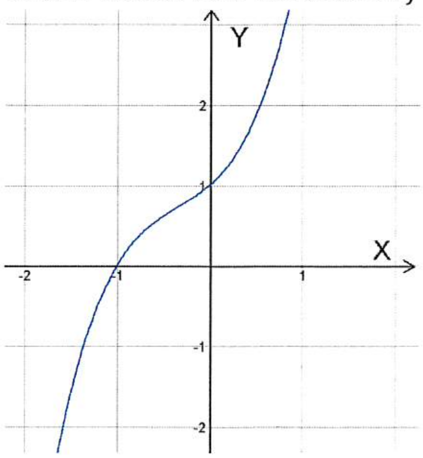
pq: $x^2-2x-8=0$

$x = 1 \pm \sqrt{1+8}$

$= 1 \pm \sqrt{9} = 1 \pm 3$

$x_3 = 4 \quad x_4 = -2$

11. Grafen nedan visar funktionen $f(\cancel{x}) = \cancel{x}^3 + \cancel{x}^2 + \cancel{x} + 1$



Bestäm dess två komplexa rötter (1/2/0)

Enligt grafen är $x=-1$ ett nollställe $\Rightarrow (x+1)$ en faktor

$x^3+x^2+x+1 = (x+1)(?) \Rightarrow (?) = \frac{x^3+x^2+x+1}{x+1} =$

$=$

x^2+1

$x^3+x^2+x+1 \quad \boxed{x+1}$

x^3+x^2

$0 \quad 0 \quad x+1$

$x+1$

$0 \quad 0$

$\Rightarrow (?) = x^2+1$

$x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1$

$x = \pm\sqrt{-1}$

$x = \pm i$

$x_2 = i$

$x_3 = -i$

12. För polynomet $f(z) = z^4 - 4z^3 + z^2 + 16z - 20$ gäller att en faktor är $(z^2 - 4)$.
Lös ekvationen $f(z) = 0$ (0/3/0)

$$f(z) = z^4 - 4z^3 + z^2 + 16z - 20 = (z^2 - 4)\cdot(?)$$

$$(?) = \frac{f(z)}{(z^2-4)} =$$

$z^2 - 4z + 5$
$z^4 - 4z^3 + z^2 + 16z - 20 \quad \boxed{z^2-4}$
$z^4 \qquad - 4z^2$
$0 \quad -4z^3 + 5z^2 + 16z - 20$
$\quad -4z^3 \qquad + 16z$
$\quad 0 \quad +5z^2 \quad 0 \quad -20$
$\qquad 5z^2 \qquad -20$
$\qquad 0 \qquad 0$

$\Rightarrow (?) = z^2 - 4z + 5$

pq: $z^2 - 4z + 5 = 0$
$z = 2 \pm \sqrt{4-5}$
$= 2 \pm \sqrt{-1}$
$= 2 \pm i$

$z^2 - 4 = 0$
$z = \pm 2$

$z_1 = 2 \qquad z_2 = -2 \qquad z_3 = 2 + i \qquad z_4 = 2 - i$

13. För polynomet $p(z) = z^4 - 4z^3 + 9z^2 - 4z + 8$ gäller att ett av dess nollställen är $z_1 = -i$.

Bestäm dess övriga nollställen. (0/2/1)

$z_1 = -i \Rightarrow z_2 = \text{konjugat} = +i \Rightarrow (z+i)(z-i)$
faktorer i $p(z)$

$$p(z) = z^4 - 4z^3 + 9z^2 - 4z + 8 = (z+i)(z-i)\cdot(?) = (z^2+1)\cdot(?)$$

$$(?) = \frac{p(z)}{z^2+1} =$$

$z^2 - 4z + 8$
$z^4 - 4z^3 + 9z^2 - 4z + 8 \quad \boxed{z^2+1}$
$z^4 \qquad + z^2$
$0 \quad -4z^3 + 8z^2 - 4z + 8$
$\quad -4z^3 \qquad -4z$
$\quad 0 \quad 8z^2 \quad 0 + 8$
$\qquad 8z^2 \qquad + 8$
$\qquad 0 \qquad 0$

$(?) = z^2 - 4z + 8 \Rightarrow$ Nollställen ges av $z^2 - 4z + 8 = 0$

pq: $z = 2 \pm \sqrt{4-8} = 2 \pm \sqrt{-4} = 2 \pm 2i$

$z_2 = +i$
$z_3 = 2 + 2i$
$z_4 = 2 - 2i$

14. Uppgiften nedan är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften.

För polynomet p gäller att $p(z) = z^5 + 4z^3 - 2z^2 - 8$

a) Visa att $(z^2 + 4)$ är en faktor i polynomet p. (0/2/0)

b) Lös ekvationen $z^5 + 4z^3 - 2z^2 - 8 = 0$ (0/1/2)

a) Om (z^2+4) är en faktor i p kommer resten bli noll vid divisionen $\frac{p}{(z^2+4)}$

$$\begin{array}{l|l} \multicolumn{1}{l}{z^3 \quad -2} & \\ \hline z^5 + 4z^3 - 2z^2 - 8 & z^2+4 \\ \underline{z^5 + 4z^3} & \\ 0 \quad 0 \quad -2z^2 - 8 & \\ \qquad\quad \underline{-2z^2 - 8} & \\ \qquad\qquad 0 \quad 0 & \end{array}$$

Resten blir noll vsv

b) Enligt a)-uppgiften gäller:

$p(z) = z^5 + 4z^3 - 2z^2 - 8 = (z^2+4)(z^3-2)$

Ekvationen $p(z) = 0 \Rightarrow (z^2+4)\cdot(z^3-2) = 0$

Lös varje faktor var för sig.

$(z^2+4) = 0$

$z^2 = -4$

$z = \pm\sqrt{-4}$

$z = \pm 2i$

$z_1 = 2i$

$z_2 = -2i$

$(z^3-2) = 0$

$z^3 = 2$ ← Skriv på polär form

$z^3 = (2, 0^\circ)$

$\alpha = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$

$z_3 = (\sqrt[3]{2}, 0^\circ)$

$z_4 = (\sqrt[3]{2}, 120^\circ)$ $+120^\circ$

$z_5 = (\sqrt[3]{2}, 240^\circ)$ $+120^\circ$

Kan också skrivas rektangulärt:

$z_3 = \sqrt[3]{2}$

$z_4 = \sqrt[3]{2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$z_5 = \sqrt[3]{2}\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$