FACIT

# Matematik 4 – Repetitionsprov, komplexa tal

**Del 1 - Endast svar krävs. Skriv svaren direkt på provpappret.**

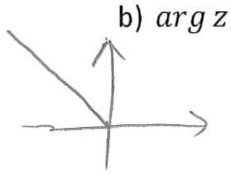
1. Ange ett valfritt komplext tal, $z$, på formen $z = a + bi$ som uppfyller,

a) $Re\ z = 4 \cdot Im\ z$

"$a = 4 \cdot b$"

Svar: ex: $z = 8 + 2i$ (1/0/0)

b) $arg\ z = 135°$



Svar: ex: $z = -2 + 2i$ (1/0/0)

c) $4 \leq |z| \leq 6$
$Re\ z = 3$

Svar: ex: $z = 3 + 4i$ (0/1/0)

2. Omvandla mellan grader och radianer.

a) $\frac{\pi}{12} \cdot \frac{180}{\pi} = \frac{180}{12} = 15°$

rad → GRAD

$\cdot \frac{180}{\pi}$

Svar: $15°$ (1/0/0)

b) $12° \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{12\pi}{180} = \frac{\pi}{15}$

GRAD → rad

$\cdot \frac{\pi}{180}$

Svar: $\frac{\pi}{15}$ (1/0/0)

3. Utgå från de två talen $z_1 = (4, 20°)$ och $z_2 = (2, 30°)$

a) Bestäm $|{z_1}^2|$

Avståndet

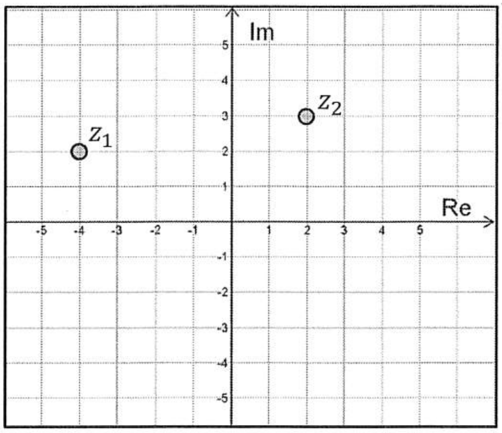
Svar: $16$ (1/0/0)

a) Bestäm $arg\left(\frac{{z_2}^2}{z_1}\right) = (30° + 30° - 20°)$

Vinkeln

Svar: $40°$ (1/0/0)

4. I figuren nedan visas ett komplext talplan med talen $z_1$ och $z_2$ markerade




a) Skriv $z_1$ på formen $a + bi$

Svar: $z_1 = -4 + 2i$ (1/0/0)

b) Beräkna $\overline{z_2} + i$ och svara på formen $a + bi$ $\overline{z_2} = 2 - 3i$

Konjugatet

Svar: $\overline{z_2} + i = 2 - 2i$ (1/0/0)

c) Bestäm $|z_2|$. *Svara exakt!*


$\Rightarrow |z_2| = \sqrt{4+9}$

Avståndet, ges av Pyth. sats

Svar: $\sqrt{13}$ (1/0/0)

5. Låt $z_1 = \left(2, \frac{\pi}{3}\right)$ och $z_2 = \left(2, \frac{\pi}{9}\right)$ och bestäm på polär form med *argumentet i radianer*

a) $z_3 = z_1 \cdot z_2 = \left(2 \cdot 2, \frac{3\pi}{9} + \frac{\pi}{9}\right)$

Svar: $z_3 = \left(4, \frac{4\pi}{9}\right)$ (1/0/0)

b) $z_4 = z_1 / z_2 = \left(2/2, \frac{3\pi}{9} - \frac{\pi}{9}\right)$

Svar: $z_4 = \left(1, \frac{2\pi}{9}\right)$ (1/0/0)

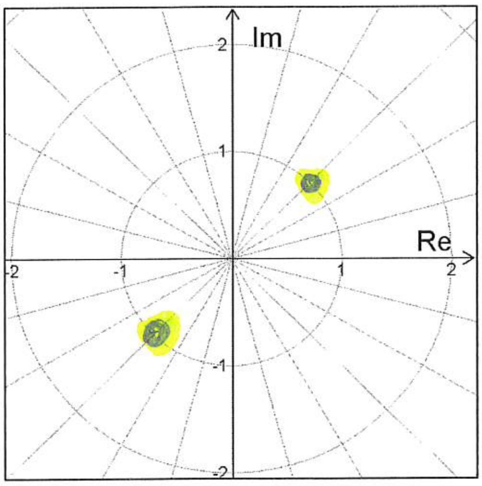
c) *En lösning* till ekvationen $z^4 = z_2$

$z^4 = \left(2, \frac{\pi}{9}\right)$

$z_1 = \left(\sqrt[4]{2}, \frac{\pi}{36}\right)$

Svar: ex $\left(\sqrt[4]{2}, \frac{\pi}{36}\right)$ (0/1/0)

6. Markera i figuren nedan lösningarna till ekvationen $z^2 = i$ $= (1, 90°)$ (0/1/0)




$z_1 = (1, 45°)$

$z_2 = (1, 225°)$

$\alpha = \frac{360}{2} = 180°$

7. Nedan visas två komplexa talplan.
Ett med rektangulära koordinater och ett med polära cirklar.

Markera i dessa komplexa talplan de komplexa talen $A - E$ nedan.
*OBS! Varje tal behöver bara markeras i ett talplan!* (2/1/0)

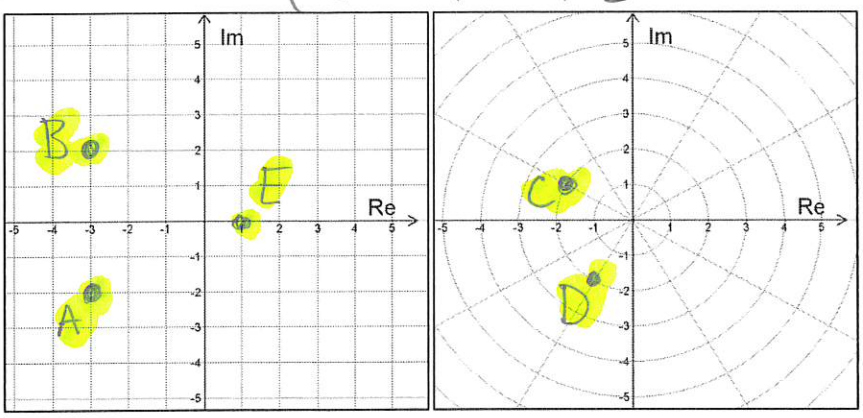
$A = -3 - 2i$

$B = \bar{A}$ $= -3 + 2i$

$C = (2, 150°)$

$D = C \cdot i$ $= (2, 150°) \cdot (1, 90°) = (2, 240°)$

$E = Im\, C$ $= \mathrm{Im}\,(2 \cdot \cos 150° + 2 \cdot \sin 150° \cdot i) = \left[\begin{matrix} \sin 150° = \frac{1}{2} \\ \text{enl. tabell} \end{matrix}\right] = 1$




8. För den komplexa ekvationen $z^{10} = w$ gäller att en lösning är
$z_1 = 3\cos(45°) + 3\sin(45°)i$

$\alpha = \frac{360°}{10} = 36°$

a) Ange ytterligare en lösning till samma ekvation.

Svar: ex: $(3, 81°)$ eller $(3, 9°)$ (0/1/0)

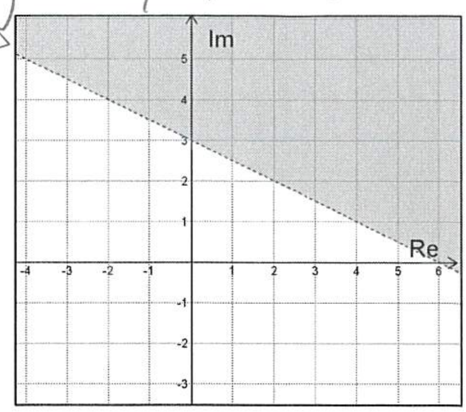
b) Bestäm talet $w$. Svara på formen $a + bi$

$w = z_1^{10} =$
$= (3, 45°)^{10} = (3^{10}, 450°) = (3^{10}, 90°)$

Svar: $w = 3^{10} \cdot i$ (0/1/0)

Linjen "y = -0,5x + 3"

9. I figuren till höger visas ett område i ett komplext talplan i form av rosa markering. Området består av de komplexa talen $z$. Skriv ett samband som beskriver talen i området



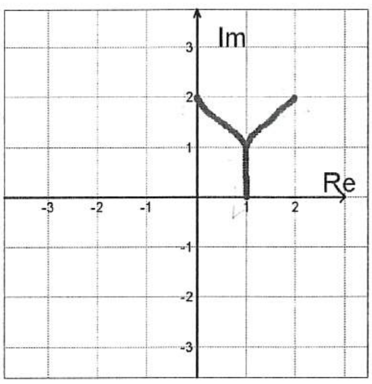

Svar: $\operatorname{Im} z > -0,5 \cdot \operatorname{Re} z + 3$ (0/1/0)

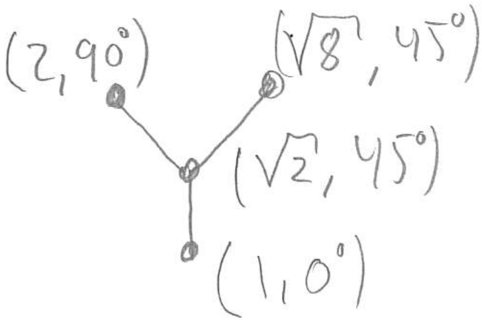
10. Bestäm värdet av $\sqrt{4i}$ $= (4i)^{0,5} = \left[\begin{array}{l}\text{Polär form:}\\ 4i = (4, 90^\circ)\end{array}\right] = (4, 90^\circ)^{0,5} = (2, 45^\circ)$

$\sqrt{\phantom{x}}$ motsvarar upphöjt till 0,5

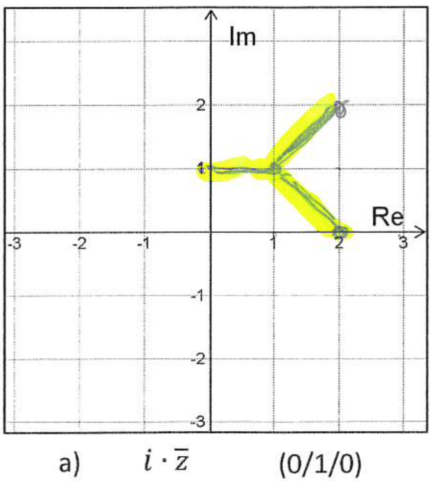
Svar: $\sqrt{4i} = (2, 45^\circ)$ (0/0/1)

11. Figuren nedan visar ett antal punkter, $z$, som tillsammans beskriver bokstaven Y i det komplexa talplanet.

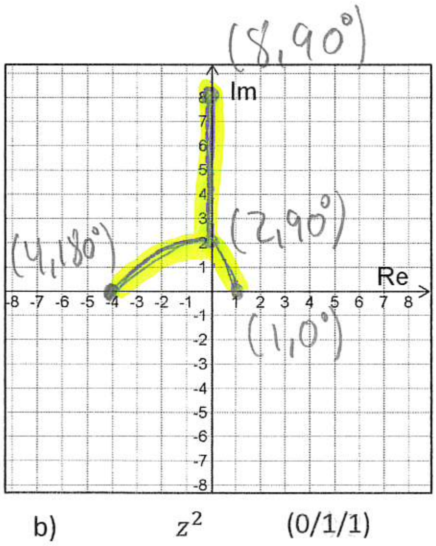



Rita i figurerna nedan hur motsvarande punkter kommer se ut efter att ha genomgått den beräkning som står nedanför figuren.




a) $i \cdot \bar{z}$ (0/1/0)



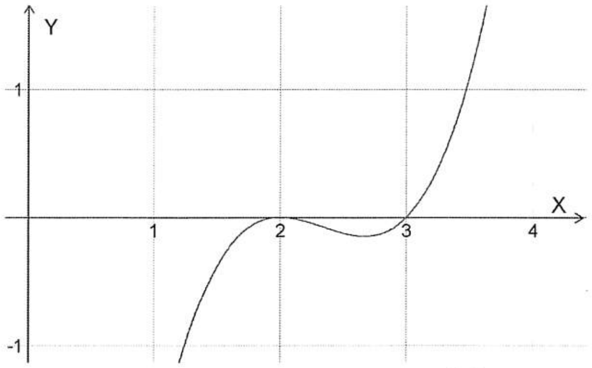

b) $z^2$ (0/1/1)

- $i \Rightarrow$ Rotation $90^\circ$ moturs

$\bar{z} \Rightarrow$ "Upp-och-ned Y:et"

Utgå från "kantpunkterna" och tänk polärt. (se figur ovan)
ex: $(\sqrt{8}, 45^\circ)^2 = (8, 90^\circ)$

12. Figuren nedan visar grafen till tredjegradsfunktionen, $p(x) = x^3 - 7x^2 + 16x + a$

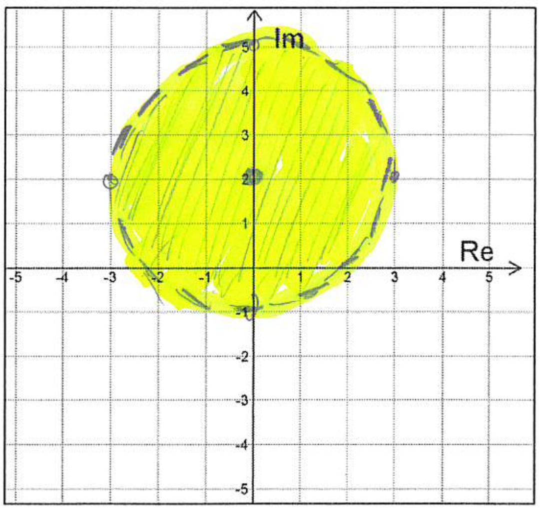



Bestäm resten vid divisionen $\dfrac{p(x)}{x+1}$

Enligt grafen är
$p(x) = (x-2)(x-2)(x-3) \Rightarrow$
$\Rightarrow a = (-2)\cdot(-2)\cdot(-3) = -12$
Division med $x+1$ ger enl. restsatsen resten $p(-1) =$
$= -1 - 7 - 16 - 12 =$

Svar: $-36$ (0/0/1)

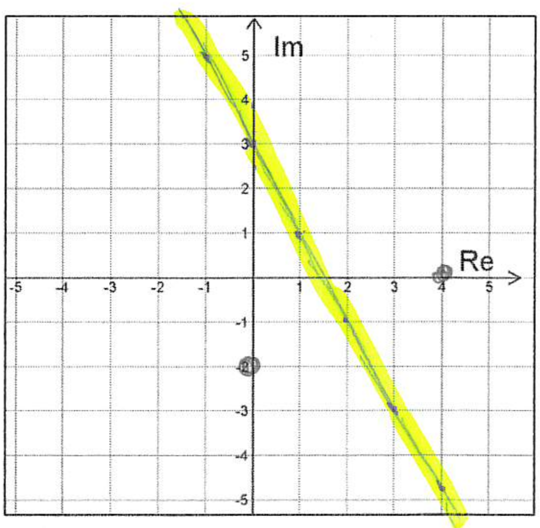
13. Markera i de komplexa talplanen områdena som beskrivs nedanför.
*Endast svar krävs!*




a) $|z - 2i| < 3$ (0/2/0)

"En cirkel med mittpunkt i $2i$, och radien 3"

$< \Rightarrow$ Allt innanför, cirkeln streckad.




b) $|z + 2i| = |z - 4|$ (0/0/2)

Algebraiskt: $|a+bi+2i| = |a+bi-4|$
$\sqrt{a^2+(b+2)^2} = \sqrt{(a-4)^2+b^2}$
$a^2+b^2+4b+4 = a^2-8a+16+b^2$
$4b+4 = -8a+16$
$b = -2a+3$
Geometriskt resonemang:
"Alla punkter med samma avstånd till $-2i$ som till 4"

**Del 2 – Utan digitala hjälpmedel. Fullständig redovisning krävs. Skriv svar på provpappret**

14. Beräkna $\frac{9+2i}{2+i}$ (2/0/0)

$$\frac{9+2i}{2+i} = \left[\begin{array}{c}\text{Förläng med}\\ \text{nämnarens konjugat}\\ (2-i)\end{array}\right] = \frac{(9+2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{18-9i+4i-2i^2}{4-i^2} =$$

$$= [i^2 = -1] = \frac{18-5i+2}{4+1} = \frac{20-5i}{5} = 2-i$$

15. För de två talen $z_1$ och $z_2$ gäller:

$z_1 \cdot z_2 = 8+i$

$z_1 = 2-i$ $\Rightarrow$

Bestäm $Re\, z_2$ (2/0/0)

$$z_1 \cdot z_2 = 8+i \Rightarrow z_2 = \frac{8+i}{z_1} = \frac{8+i}{2-i} = \frac{(8+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} =$$

$$= \frac{16+8i+2i+i^2}{4-i^2} = [i^2=-1] = \frac{15+10i}{5} = 3+2i$$

$$Re\, z_2 = Re(3+2i) = 3$$

16. Mattias löser ekvationen

$z^4 = 16i$

och får de fem lösningarna

$z_1 = (2, 22.5°)$ $z_2 = (2, 112.5°)$

$z_3 = (2, 202.5°)$ $z_4 = (2, 292.5°)$

$z_5 = (2, 382.5°)$

Mattias tycker det verkar konstigt då en fjärdegradsekvation endast påstås ge fyra lösningar. Förklara för Mattias vad som blivit fel. (2/0/0)

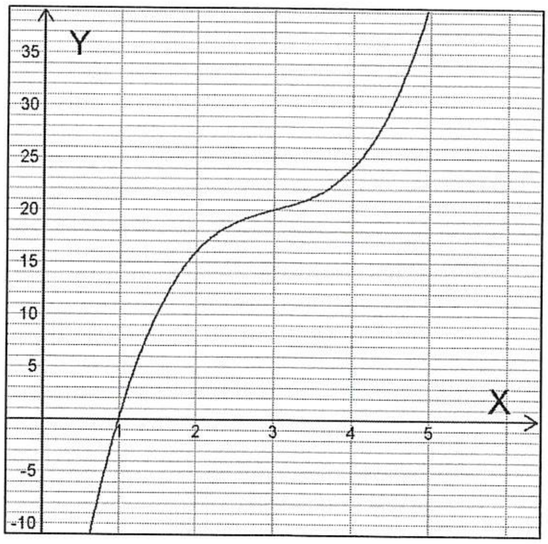
Den femte lösningen är bara ett alternativt skrivsätt av den första, dvs $z_1 = (2; 22{,}5°) = z_5 = (2; 382{,}5°)$

Alla vinklar större än 360° kan alltid skrivas som en vinkel mellan 0 och 360°

Alltså är $z_5$ ingen ny lösning.

17. Grafen till höger visar funktionen
$p(x) = x^3 - 9x^2 + 28x - 20$

Lös ekvationen $p(x) = 0$ (2/2/0)




Enligt grafen är $x=1$ ett nollställe $\Rightarrow$ $(x-1)$ en faktor

$x^3 - 9x^2 + 28x - 20 = (x-1)(\ ?\ )$

( ? ) fås via divisionen

$$\begin{array}{l}
x^2 - 8x + 20 \\
\hline
x^3 - 9x^2 + 28x - 20 \quad \boxed{x-1} \\
-x^3 - 1x^2 \\
\hline
0 \quad -8x^2 + 28x - 20 \\
\quad -8x^2 + 8x - 20 \\
\hline
\quad 0 \quad 20x - 20 \\
\quad\quad 20x - 20 \\
\hline
\quad\quad 0 \quad 0
\end{array}$$

$(?) = x^2 - 8x + 20$

Övriga lösningar fås genom pq-

$x^2 - 8x + 20 = 0$

$x = 4 \pm \sqrt{16-20} = 4 \pm \sqrt{-4} =$

$= \left[\sqrt{-4} = 2i\right] = 4 \pm 2i$

18. Bestäm kvoten och resten vid polynomdivisionen (1/2/0)

$\frac{2x^4 + x^3 - 5x}{x - 3}$ OBS!! $2x^4 + x^3 + \underline{0x^2} - 5x$

$$\begin{array}{l}
2x^3 + 7x^2 + 21x + 58 \\
\hline
2x^4 + x^3 + 0x^2 - 5x \quad \boxed{x-3} \\
2x^4 - 6x^3 \\
\hline
0 \quad + 7x^3 + 0x^2 - 5x \\
\quad 7x^3 - 21x^2 \\
\hline
\quad 0 \quad 21x^2 - 5x \\
\quad\quad 21x^2 - 63x \\
\hline
\quad\quad 0 \quad + 58x \\
\quad\quad\quad 58x - 174 \\
\hline
\quad\quad\quad 174
\end{array}$$

Kvoten = $2x^3 + 7x^2 + 21x + 58$

Resten = 174

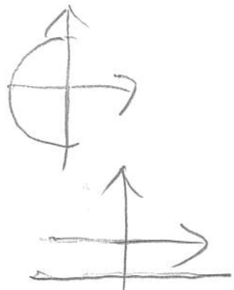
OBS! Resten kan också fås med restsatsen!
Resten = täljarens värde då $x = 3$

19. För $z$ gäller följande:

$\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2}$ ⇒

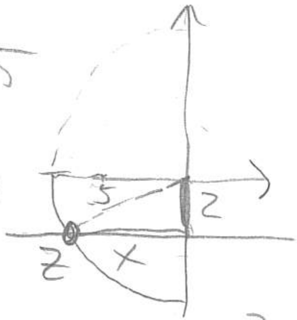
$Im\, z = -2$ ⇒

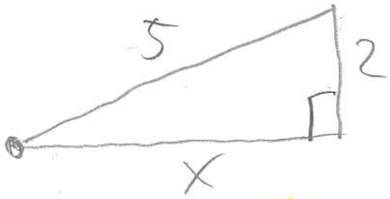
$|z| = 5$ ⇒ Avståndet 5



Bestäm $z$ på formen $a + bi$ (1/2/0)

All info samtidigt ⇒




$$\Rightarrow x^2 + 2^2 = 5^2$$

$$x = \sqrt{25-4} = \sqrt{21}$$

$$z = -\sqrt{21} - 2i$$

---

20. Lös ekvationen $z^6 + 64i = 0$ ⇒ $z^6 = -64i = (64, 270°)$ (0/3/0)

Skriv om på polär form

$z^6 = (64, 270°)$

$(r^6, 6 \cdot v) = (64, 270°)$

$r^6 = 64 \Rightarrow r = \sqrt[6]{64} = 2$

$6 \cdot v = 270° \Rightarrow v = 45°$

$z_1 = (2, 45°)$ +60°

$z_2 = (2, 105°)$ +60°

$z_3 = (2, 165°)$ +60°

$z_4 = (2, 225°)$ +60°

$z_5 = (2, 285°)$ +60°

$z_6 = (2, 345°)$

$\alpha = \frac{360}{6} = 60°$

---

21. Lös ekvationen $(i - 1) \cdot \bar{z} - (1 - 2i) \cdot z = 5 - 12\,i$ (0/3/0)

$z = a + bi$
$\bar{z} = a - bi$

$\Rightarrow (i-1)(a-bi) - (1-2i)(a+bi) = 5 - 12i$

$a \cdot i + b - a + bi - (a + bi - 2ai + 2b) = 5 - 12i$

$a \cdot i + b - a + bi - a - bi + 2ai - 2b = 5 - 12i$

Dela upp i Realdel och Imdel var för sig

$$\begin{cases} \text{Real: } -2a - b = 5 \\ \text{Im: } \quad 3a = -12 \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{12}{3} = -4 \Rightarrow 8 - b = 5$$

$$b = 8 - 5 = 3$$

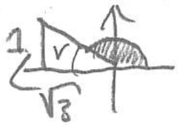
$$z = -4 + 3i$$

22. För talet $z$ gäller $z = -\sqrt{3} + i$.
Beräkna $z^5$. *Svara exakt på formen $a + bi$*

(0/2/1)

Strategi:
Skriv om till polär
$\Downarrow$
Höj upp
$\Downarrow$
Skriv om till Rekt.

$-\sqrt{3} + i = \Big[$



Tabell: $\tan v = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow v = 30^\circ$

$\Rightarrow \arg z = 150^\circ$

$|z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2 \Big] =$

$= (2, 150^\circ)$

$z^5 = (2, 150^\circ)^5 = (32, 5 \cdot 150^\circ) = (32, 750^\circ) = [750^\circ = 720 + 30^\circ] =$

$= (32, 30^\circ) = 32(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ) = \left[\begin{array}{l} \text{Tabell:} \\ \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \\ \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right] = 16\sqrt{3} + 16i$

23. För tredjegradsekvationen $p(z) = 0$ gäller att dess tre lösningar är
$z_1 = 2$
$z_2 = 3i$
$z_3 = 4i$

samt att koefficienten framför $z^3$-termen är 1.

Bestäm $p(i)$

(0/1/2)

$z_1 = 2 \Rightarrow (z-2)$ en faktor
$z_2 = 3i \Rightarrow (z-3i)$ en faktor
$z_3 = 4i \Rightarrow (z-4i)$ en faktor

$p(z) = (z-2)\cdot(z-3i)(z-4i) = (z-2)(z^2 - 4iz - 3iz + 12i^2) =$

$= [i^2 = -1] = (z-2)(z^2 - 7iz - 12) =$

$= z^3 - 7iz^2 - 12z - 2z^2 + 14iz + 24 =$

$= z^3 - 2z^2 - 7iz^2 - 12z + 14iz + 24$

$p(i) = i^3 - 2\cdot i^2 - 7\cdot i \cdot i^2 - 12\cdot i + 14 i \cdot i + 24 =$

$= \left[\begin{array}{l} i^3 = i^2 \cdot i \\ i^2 = -1 \end{array}\right] = -i - 2\cdot(-1) - 7\cdot i\cdot(-1) - 12\cdot i + 14\cdot(-1) + 24 =$

$= -i + 2 + 7i - 12i - 14 - 24 = -36 - 6i$

24. För ekvationen $z^4 - 8z^3 + 26z^2 - 48z + 45 = 0$
gäller att en rot är $z_1 = 1 + 2i$

Bestäm övriga rötter. (0/1/2)

$z_1 = 1+2i$ Endast reella koeff. $\Rightarrow$ Även konjugatet är en rot.

$z_2 = 1-2i$

$z_1 = 1+2i \Rightarrow (z-(1+2i))$ en faktor
$z_2 = 1-2i \Rightarrow (z-(1-2i))$ en faktor

$$z^4 - 8z^3 + 26z^2 - 48z + 45 = \underbrace{(z-(1+2i))(z-(1-2i))}_{((z-1)^2 - 4i^2) = (z^2-2z+1+4) = (z^2-2z+5)} \cdot (?)$$

$$(?) = \frac{z^4 - 8z^3 + 26z^2 - 48z + 45}{z^2 - 2z + 5}$$

$$\begin{array}{l|l}
\quad z^2 - 6z + 9 & \\
\hline
z^4 - 8z^3 + 26z^2 - 48z + 45 & z^2 - 2z + 5 \\
z^4 - 2z^3 + 5z^2 & \\
\hline
0 \; - 6z^3 + 21z^2 - 48z + 45 & \\
\quad - 6z^3 + 12z^2 - 30z & \\
\hline
\quad 0 + 9z^2 - 18z + 45 & \\
\qquad 9z^2 - 18z + 45 & \\
\hline
\qquad 0 \quad 0 \quad 0 &
\end{array}$$

Övriga rötter fås via pq av (?) $\Rightarrow$ $z^2 - 6z + 9 = 0$

$z = 3 \pm \sqrt{9-9}$
$= 3 \pm 0$ (dubbelrot)

$z_2 = 1-2i$ $\quad z_3 = 3$ $\quad z_4 = 3$

**Del 3 – Med digitala hjälpmedel. Redovisningar krävs om inget annat anges.**
**Skriv svaren direkt på provpappret.**

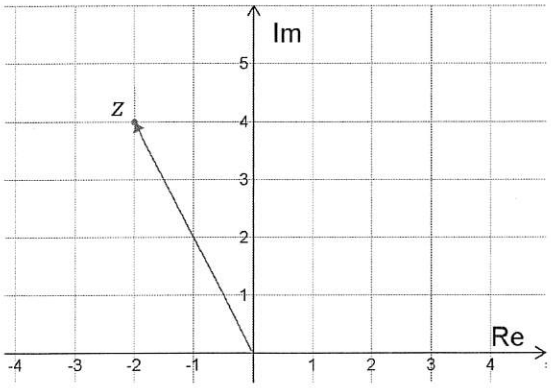
D1. Hur många radianer är 0,5 grader? (1/0/0)
*Endast svar krävs!*

GRAD $\to$ rad

$\cdot \frac{\pi}{180}$

$0{,}5^\circ = 0{,}5 \cdot \frac{\pi}{180}\text{ rad} = \frac{\pi}{360} \approx 0{,}0087$

D2. Figuren visar ett komplext talplan med talet $z$ markerat.




Bestäm $z$ på polär form med *argumentet i grader.* (2/0/0)

Enligt figuren: $z = -2 + 4i$

Till Polär Form $(-2+4i) \to (4{,}47\ ,\ 116{,}57^\circ)$

D3. För talen $z_1$, $z_2$ och $z_3$ gäller att:

$z_1 = 21 - 13i$

$\frac{z_1}{z_2} = 5 - 6i \quad \Rightarrow \quad z_2 = \frac{z_1}{5-6i} = \frac{21-13i}{5-6i} = 3 + i$

$ar\,g(z_1 \cdot z_2 \cdot z_3) = 135°$

Bestäm $arg\, z_3$ (2/1/0)

$\arg(z_1) = -31{,}76^\circ$

$\arg(z_2) = 18{,}43^\circ$

$\arg(z_1 \cdot z_2 \cdot z_3) = 135^\circ \Rightarrow \arg z_1 + \arg z_2 + \arg z_3 = 135$

$\arg z_3 = 135 - 18{,}43^\circ - (-31{,}76^\circ)$

$= 148{,}33^\circ$

D4. Lös ekvationen $-2iz - \overline{z} = 4 + 11i$ (0/2/0)

$$z = (x+yi) \Rightarrow -2iz - \overline{z} = -2i(x+yi) - (x-yi) =$$
$$= -2xi + 2y - x + yi =$$
$$= (2y - x) + (-2x + y)i = 4 + 11i$$

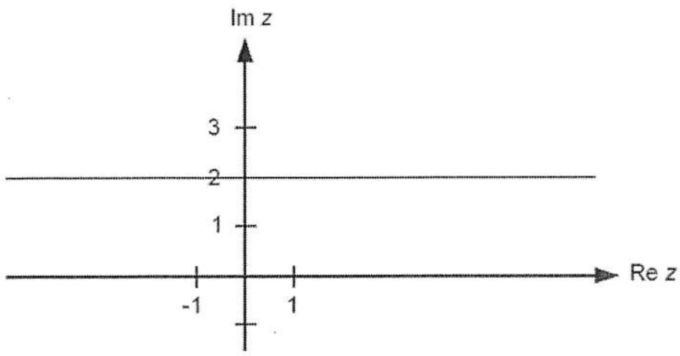
Realdelarna lika $2y - x = 4$ Lös({eq1, eq2})

Imagdelarna lika $-2x + y = 11$ $\Rightarrow x = -6 \quad y = -1$

$$z = -6 - 1i$$

D5. Uppgiften nedan är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften. (0/2/1)

Talet $z$ ligger på den linje som markerats i det komplexa talplanet nedan.
Vilka värden kan realdelen för $z^2$ anta?




Enligt figuren är $z = a + 2i$

$\longrightarrow$ Geogebra

* Skriv in $y=2$
* Sätt ut en punkt på linjen
* Skapa ett komplext tal av punkten: $x(A) + y(A) \cdot i$
* Kvadrera talet och undersök vad som händer för olika värden

$\Rightarrow \text{Re } z^2 > -4$

$\longrightarrow$ Algebraiskt

Kvadrera $z \Rightarrow$

$$z^2 = a^2 + 4ai - 4$$
$$= (a^2 - 4) + 4ai$$

$\text{Re } z^2 = (a^2 - 4)$

$a^2 \geq 0 \Rightarrow$ minsta värdet $-4$

$\text{Re } z^2 \geq -4$

D6. Lös ekvationen $z^5 - iz^5 = 2(\cos(30°) + i \cdot \sin(30°))$ $= (2, 30°)$ (0/0/3)

$$z^5 - iz^5 = (2, 30°)$$

$$z^5(1-i) = (2, 30°)$$ [Bryt ut $z^5$]

$$z^5 = \frac{(2, 30°)}{(1-i)}$$ [Dela med $(1-i)$]

[Gör om $(1-i)$ till polär form:
$(1-i) = (\sqrt{2}, -45°)$]

$$z^5 = \frac{(2, 30°)}{(\sqrt{2}, -45°)}$$

[utför divisionen
$\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ $30° - (-45°) = 75°$]

$$z^5 = (\sqrt{2}, 75°)$$

[utför "standardtänket"
$z_1 = (r, v)$
$z_1^5 = (r^5, 5 \cdot v)$]

$$r^5 = \sqrt{2}$$

$$r = \sqrt[5]{\sqrt{2}} = \sqrt[10]{2}$$ $5v = 75°$
$v = 15°$

$$\alpha = \frac{360°}{5} = 72°$$

$$z_1 = (\sqrt[10]{2}, 15°)$$ $+72°$
$$z_2 = (\sqrt[10]{2}, 87°)$$ $+72°$
$$z_3 = (\sqrt[10]{2}, 159°)$$ $+72°$
$$z_4 = (\sqrt[10]{2}, 231°)$$ $+72°$
$$z_5 = (\sqrt[10]{2}, 303°)$$ $+72°$