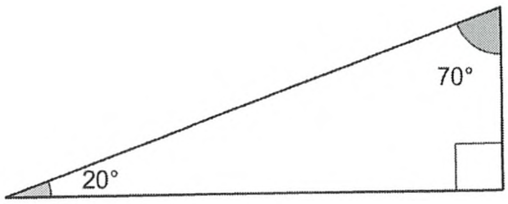
FACIT

2.1 Radianer och graferna till sinus och cosinus

Del 1 – Utan digitala hjälpmedel

1. Figuren visar en rätvinklig triangel med vinklarna angivna i grader.



$\measuredangle 90° =$ Enligt FB $= \frac{\pi}{2}$

Ange dess tre vinklar i radianer. (2/0/0)

Enligt FB: $30° = \frac{\pi}{6} \Rightarrow 10° = \frac{30°}{3} = \frac{\pi/6}{3} = \frac{\pi}{18}$

$20° = 2 \cdot 10° = \frac{2\pi}{18} = \frac{\pi}{9}$ $\quad 70° = \frac{7\pi}{18}$

2. Konvertera mellan radianer och grader. *Svara på enklaste form!*

a) $\frac{3\pi}{2}\ rad =$ ° FB: $\frac{\pi}{2} = 90° \Rightarrow \frac{3\pi}{2} = 270°$ (1/0/0)

b) $\frac{3\pi}{8}\ rad =$ ° FB: $\frac{\pi}{4} = 45° \Rightarrow \frac{\pi}{8} = 22{,}5°$ (1/0/0)

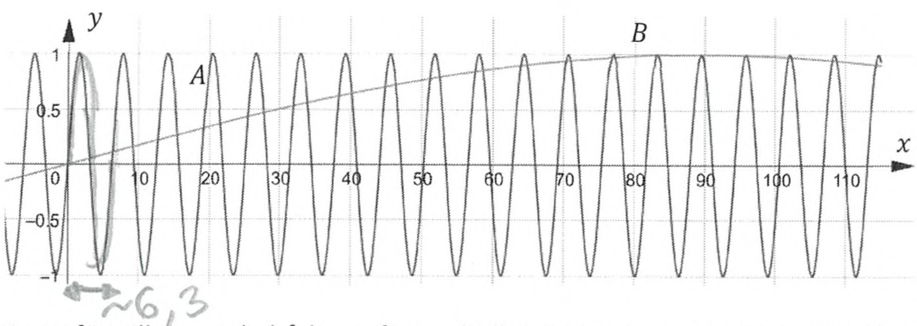
$3\frac{\pi}{8} = 3 \cdot 22{,}5° = 67{,}5°$

c) $132° =$ rad FB: $180° = \pi$ (0/1/0)

$1° = \frac{\pi}{180}$

$132° = 132 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{66\pi}{90} = \frac{33\pi}{45} = \frac{11\pi}{15}$

3. Figuren visar grafen till $y = \sin(x)$ där argumentet, x, i ena fallet anges i grader och i andra fallet anges i radianer.

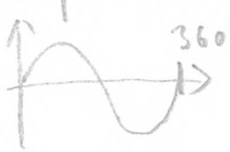


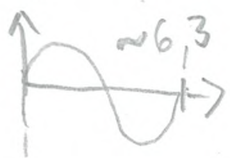
A är radianer pga kortast period

($2\pi < 360$)

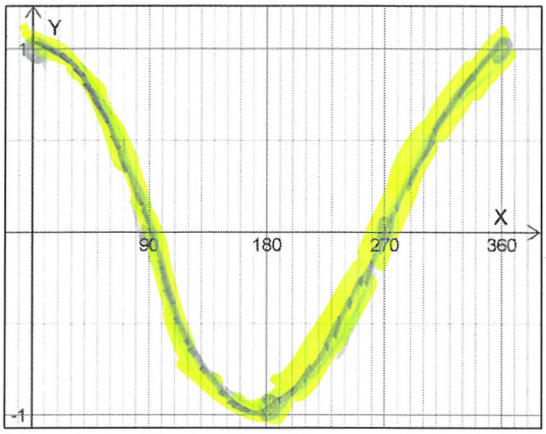
Ange för vilken av de båda graferna A eller B som argumentet angetts i *radianer*. *Motivera ditt svar!* (1/0/0)

Grader: 1 period = 360 $\quad$ Radianer: 1 period = $2\pi \approx 6{,}3$



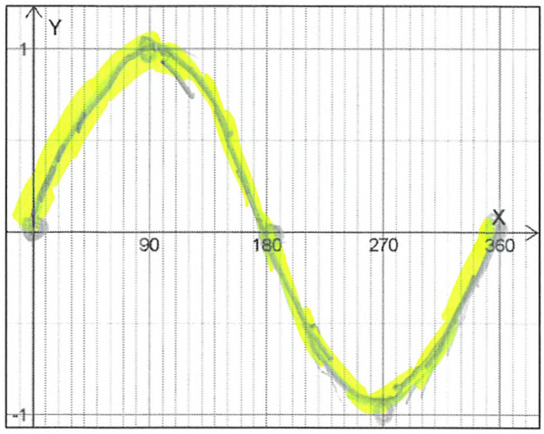


4. Nedan visas fyra koordinatsystem med ett trigonometriskt funktionsuttryck till vart och ett av dessa, där x är angivet i grader.
Skissa i koordinatsystemen nedan graferna till respektive funktionsuttryck.



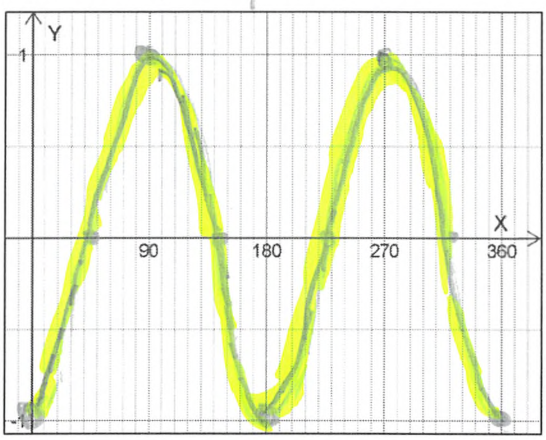
a) $y = cos\,(x)$ (1/0/0)

"Börjar på max"



b) $y = sin\,(x)$ (1/0/0)

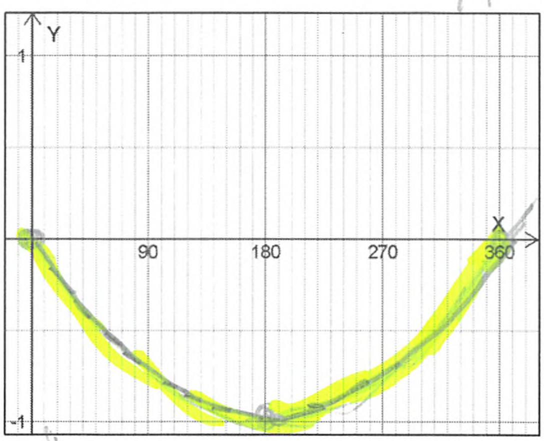
"Börjar i mitten, på väg upp"



c) $y = -cos\,(2x)$ (2/0/0)

"Börjar i min"

$\text{Period} = \frac{360}{2} = 180°$



d) $y = -sin\,(0{,}5x)$ (2/0/0)

"Börjar i mitten på väg ned"

$\text{Period} = \frac{360}{0{,}5} = 720°$

5. Utgå från funktionen $f(x) = 2 - 3\sin(4x)$

a) Bestäm funktionens *period.* (2/0/0)
Svara i både grader och radianer!

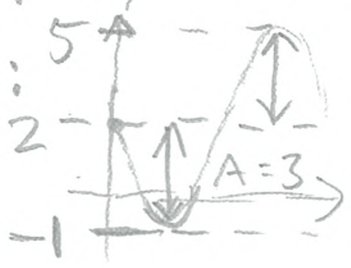
Siffran framför x = 4 ⇒

$\text{Period} = \frac{360°}{4} = 90° = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

b) Bestäm funktionens minsta värde. (1/0/0)

* "Snabbmetod": Byt ut sin mot ± 1

* Skiss av grafen:



$\Rightarrow 2 - 3 \cdot 1 = -1$ ← Minst

$2 - 3 \cdot (-1) = 5$ ← Störst

$2 - 3\sin(4x)$

Mitten ↑ ↑ A=3

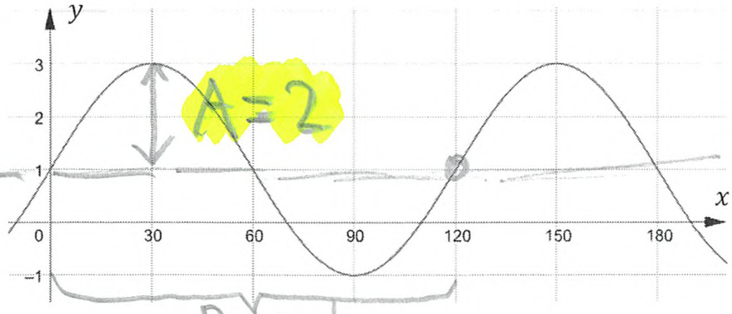
A: Amplituden

B = Mittlinjen

$k = \frac{360°}{\text{Perioden}}$

6. a) Nedan visas grafen till funktionen $f(x) = Asin(kx) + B$

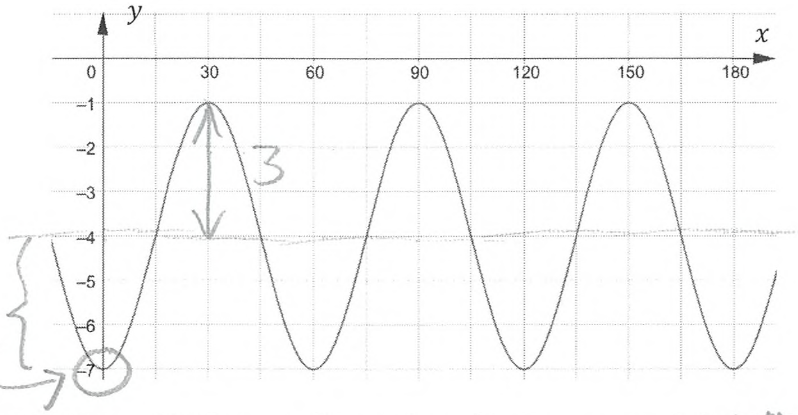
B=1



Bestäm med hjälp av grafen värden på konstanterna A, B och k (2/1/0)

Perioden = 120° ⇒ $k = \frac{360}{120} = 3$

b) Nedan visas grafen till funktionen $f(x) = Acos(6x) + B$.



← B=−4

Börjar på min. ⇒ A är neg.

Bestäm med hjälp av grafen värden på konstanterna A, B och k (1/1/0)

|A| = 3, men eftersom detta är en cos-kurva som är oförskjuten i x-led som börjar i sitt min. snarare än max är A negativ

⇒ A = −3

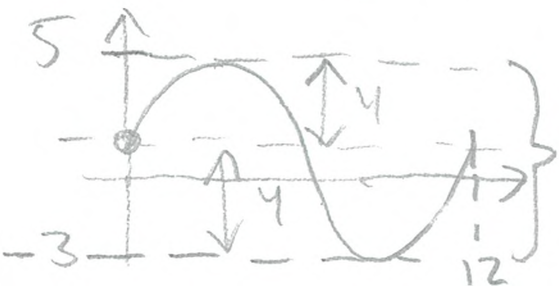
7. Bestäm värden på konstanterna A, B och k så att funktionen $f(x) = A + Bsin(kx)$, där x anges i **radianer**, uppfyller:

Största värde 5
Minsta värde −3
Period 12.

← Mitten = $\frac{5+(-3)}{2} = \frac{2}{2} = 1$ ⇒ B = 1

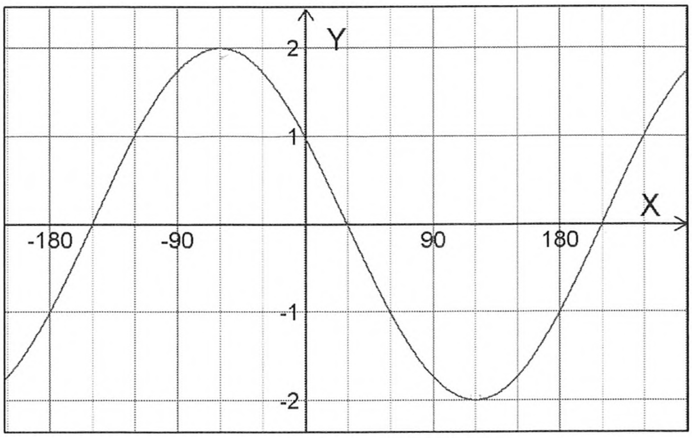
(1/2/0)

Period 12 ⇒ $k = \frac{2\pi}{\text{Period}} = \frac{2\pi}{12}$ ⇒ $k = \frac{\pi}{6}$



8 steg ⇒ A=4

8. Nedan visas grafen till en trigonometrisk funktion.



OBS!

Minus inne $(x-a) \Rightarrow$ i ( ) $\Rightarrow$ Flytt åt höger

$(x+b) \Rightarrow$ Plus inne i ( ) $\Rightarrow$ Flytt åt vänster

Två av alternativen nedan svarar mot den ritade kurvan. Vilka? (1/1/0)

A $f(x) = 2\sin(x - 30°)$ **B** $f(x) = 2\cos(x + 60°)$ ← En cos flyttad 60° åt vänster

C $f(x) = -2\sin(x + 30°)$ **D** $f(x) = -\sin(x - 30°)$

E $f(x) = -2\sin(x - 30°)$ **F** $f(x) = -2\cos(x + 120°)$

En −sin flyttad 30° åt höger

30°

−60°

9. Temperaturen på ett visst ställe varierar enligt modellen

$T(x) = 14 + 3\cos\left(\frac{\pi}{12}x - 4\right)$

där T är temperaturen i °C och x är antal timmar som gått sedan klockan 00.00 (räknat i radianer)

a) Bestäm den högsta och lägsta temperaturen. (1/0/0)

"Snabbmetod": Byt ut cos mot ±1

$\Rightarrow$ $14 + 3 \cdot 1 = 17$ ← Störst

$14 - 3 \cdot 1 = 11$ ← Minst

b) Bestäm funktionens period och tolka dess betydelse. (0/1/0)

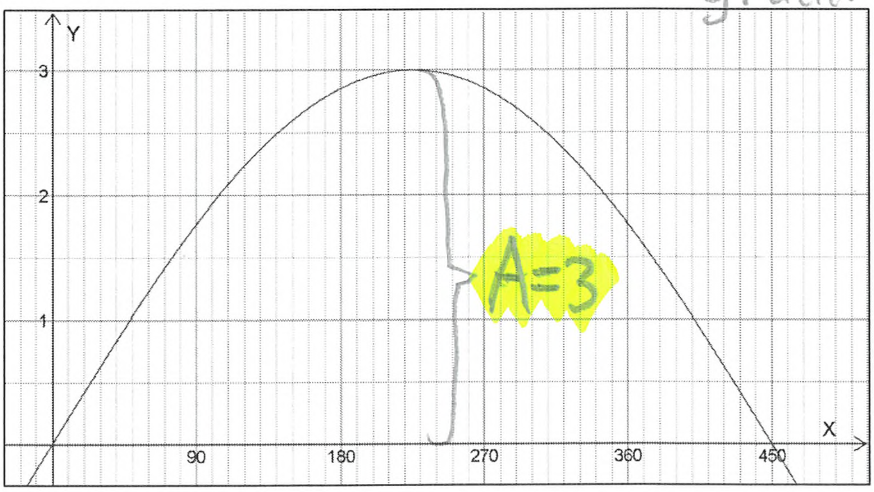
$$\text{Period} = \frac{2\pi}{K} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{12}} = 2\pi \cdot \frac{12}{\pi} = 24$$

↑ siffran framför x

$P = 24 \Rightarrow$ Temperaturväxlingen varierar likadant varje dygn, dvs upprepas periodiskt varje 24 h

$= 24$ h

10. Grafen nedan visar en trigonometrisk funktion som kan skrivas antingen på formen $y = A\sin(kx)$ eller $y = A\cos(k(x + v))$, där x anges i ~~radianer~~. grader



a) Bestäm värden på konstanterna A och k (1/1/0)

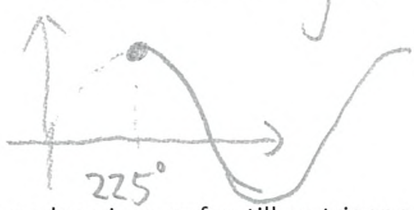
motsvarar en halv period = 450°

$\Rightarrow$ En hel period = 900° $\Rightarrow$ $k = \frac{360°}{900°} = \frac{4 \cdot 90°}{10 \cdot 90°} = \frac{2}{5}$

b) Bestäm värdet på konstanten v (0/1/0)

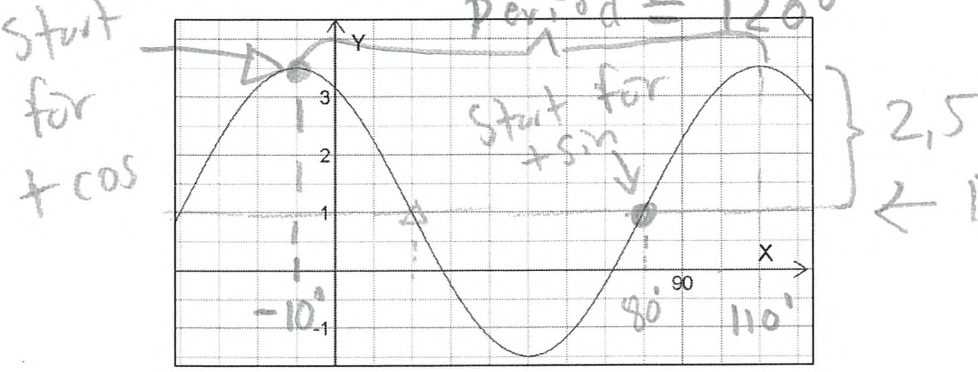
För en cos gäller att den börjar på max

$\Rightarrow$ Flyttad 225° åt höger



$\Rightarrow$ $v = -225°$

11. Figuren nedan visar grafen till en trigonometrisk funktion.



Ta fram ett möjligt funktionsuttryck som ger grafen. (1/2/0)

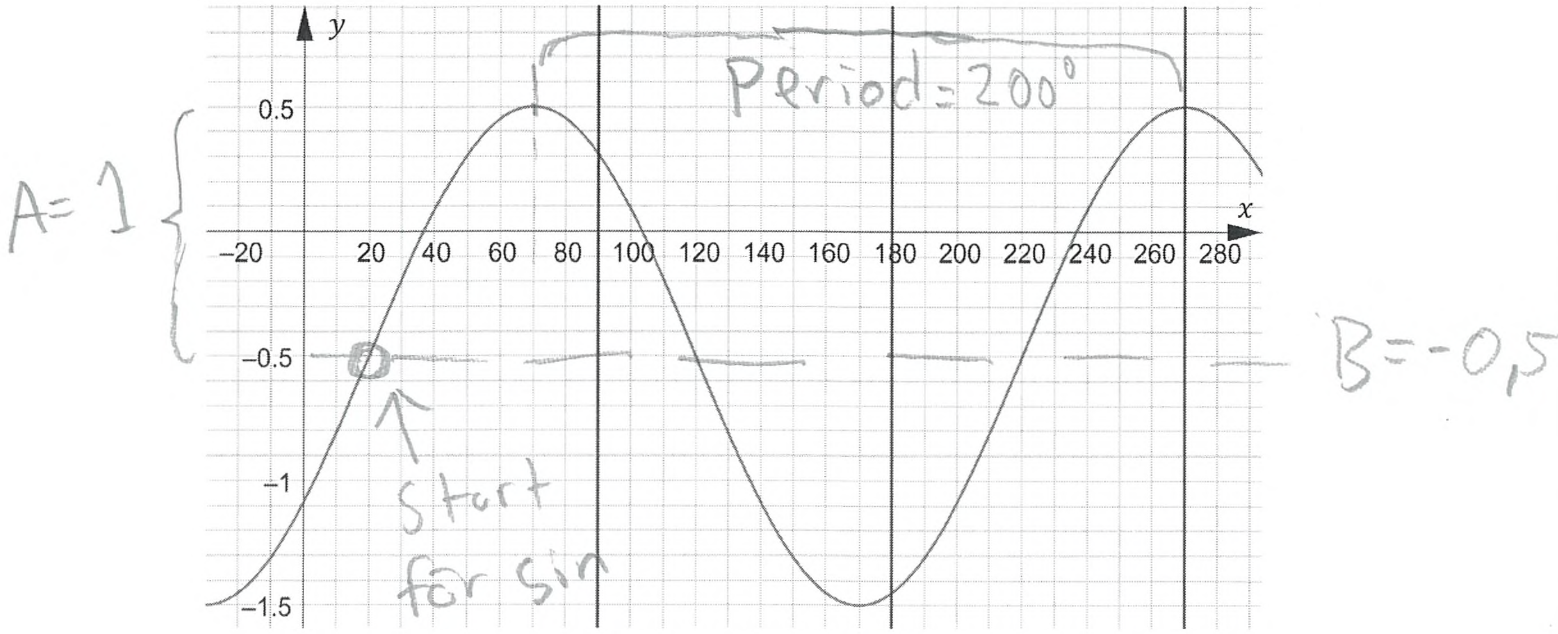
Oavsett typ, bestäm först mitten, amplituden, perioden
(1) (2,5) (120°)

Beräkna k-värdet: $k = \frac{360}{\text{Period}} = 3$

Bestäm sedan om det ska vara sin, cos, −sin, −cos och leta upp motsvarande punkt

$\Rightarrow$ ex: $f(x) = 2{,}5\cos(3(x + 10°)) + 1$ eller: $f(x) = 2{,}5\sin(3(x - 80°)) + 1$

12. a) Nedanstående graf visar en trigonometrisk funktion
på formen $y = A \cdot \sin(k \cdot (x + v^\circ)) + B$ där x anges i grader.
Ange med hjälp av grafen värdet på konstanterna A, k, v och B. (2/2/0)



Mitten = -0,5 ⇒ $B = -0,5$

Antal steg upp/ned = 1 ⇒ $A = 1$

Flyttad 20° åt höger ⇒ $v = -20^\circ$

Period = 200° ⇒ $k = \frac{360}{200} = \frac{18}{10} = 1,8$

b) Grafen ovan kan också fås via $y = A \cdot \mathbf{cos}(k \cdot (x + v^\circ)) + B$
Detta innebär att **en** av de fyra konstanterna A, k, v och B ändras.

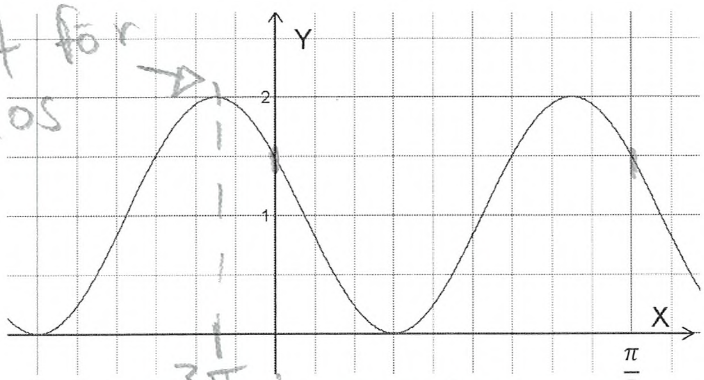
Vilken ändras, och vad blir det nya värdet på konstanten? (0/1/0)

Om den istället ses som en +cos gäller att start är vid maxpunkten, dvs vid x-värdet 70° (eller 270°, eller 70° ± 200°)

⇒ $v = -70^\circ$

Övriga konstanter är lika
(samma mittvärde, amplitud och period)

13. Figuren visar en trigonometrisk funktion som kan skrivas på formen $y = cos(kx + v) + 1$, där x anges i radianer.



Start för +cos

$-\frac{3\pi}{36}$

Period $= \frac{\pi}{2}$

OBS! Det är skillnad på skrivsätt MED parentes: $k(x+v)$ och UTAN: $kx+v$

Det är endast MED som v motsvarar förskjutning i x-led:

Bestäm värdet på konstanterna k och v. (0/1/1)

$k = \frac{2\pi}{\text{Period}} = \frac{2\pi}{\pi/2} \Rightarrow 4 = k$

1 ruta i x-led: $\frac{\pi}{2} / 9 = \frac{\pi}{18}$

"Start": $-1{,}5$ ruta $= -\frac{3\pi}{36}$

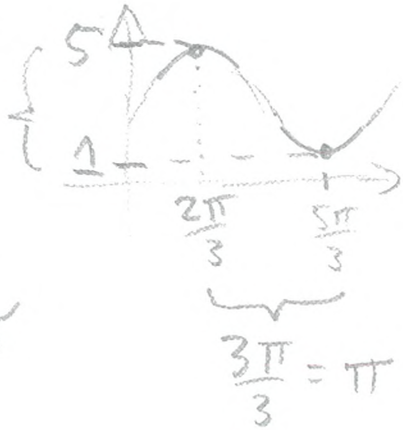
$\Rightarrow \cos\left(4\left(x + \frac{3\pi}{36}\right)\right) + 1 =$

$=$ [gångra in i ( )]

$= \cos\left(4x + \frac{12\pi}{36}\right) + 1 \Rightarrow v = \frac{\pi}{3}$

14. Uppgiften nedan är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften. (0/1/2)

En trigonometrisk kurva har en maximipunkt i $\left(\frac{2\pi}{3}, 5\right)$ och en minimipunkt i $\left(\frac{5\pi}{3}, 1\right)$. Kurvan har inga extrempunkter mellan dessa två punkter.
Bestäm en ekvation för kurvan.



Mellan max och min är det en halv period $\Rightarrow$ Perioden $= 2\pi$

$k = \frac{2\pi}{\text{Perioden}} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$

Väljer +cos $\Rightarrow$ Flyttad $\frac{2\pi}{3}$ åt höger

$\Rightarrow v = -\frac{2\pi}{3}$

$B = \frac{5+1}{2} = 3$

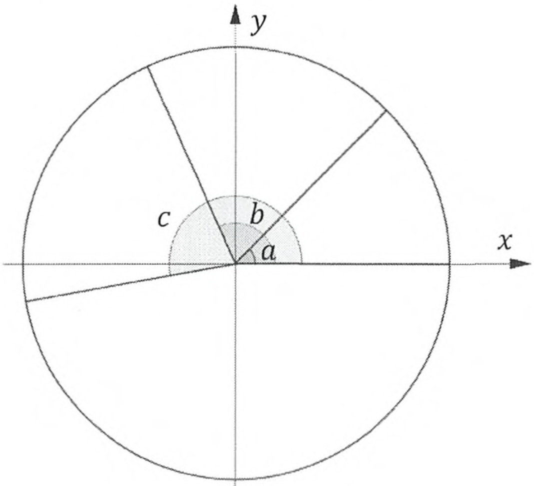
$A = \frac{5-1}{2} = 2$

$\Rightarrow f(x) = 2\cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) + 3$

(men det finns fler rätta svar, ex: $f(x) = -2\cos\left(x - \frac{5\pi}{3}\right) + 3$)

Del 2 – Med digitala hjälpmedel

D1. Figuren visar en enhetscirkel med de tre vinklarna a, b och c markerade. (Notera att alla vinklar mäts från positiva x-axeln)



En av dessa vinklar är 2 radianer. Vilken? (2/0/0)

Motivera ditt svar!

2 radianer motsvarar i grader:

FB: π rad $= 180^\circ \Rightarrow 1$ rad $= \frac{180}{\pi} \Rightarrow 2$ rad $= 2 \cdot \frac{180}{\pi} \approx 114{,}6^\circ$

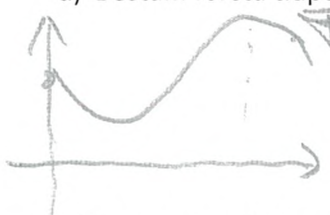
Enda vinkeln mellan 90° och 180° är b

D2. Vattendjupet på en viss plats väntas följa funktionen

$$d(t) = 8 - 5\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)$$

där d är vattendjupet i meter efter klockan 8.00 på morgonen.

a) Bestäm första tidpunkten då det högsta vattendjupet uppkommer. (1/0/0)

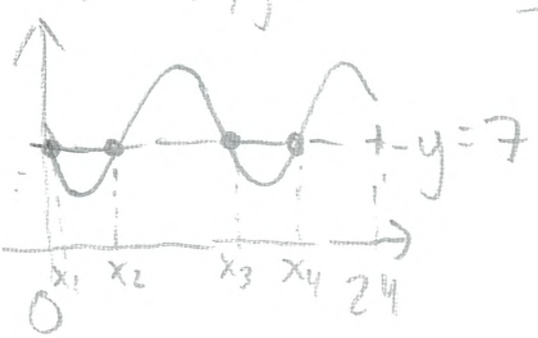


"Extrempunkt" $\Rightarrow (9, 13)$

$\Rightarrow$ 9 h efter 8.00 $\Rightarrow$ 17.00

b) Bestäm hur lång tid på ett dygn som vattendjupet är mindre än 7 meter. (0/1/0)

Ett dygn: $0 \leq x \leq 24$



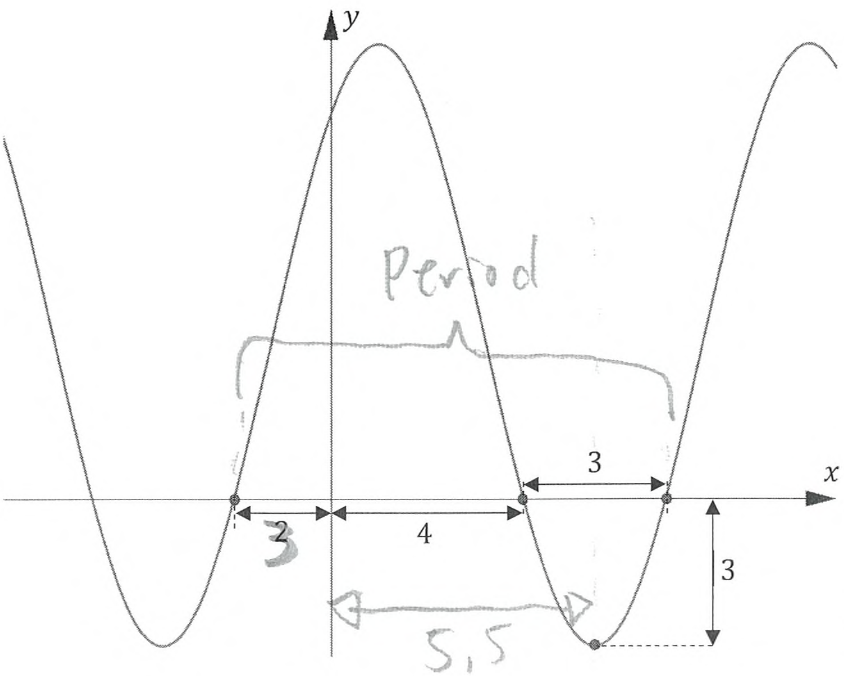
Skärning med $y = 7 \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} x_1 \approx 0{,}38 \\ x_2 \approx 5{,}62 \end{array}\right\}$ 5,23 h

$\left.\begin{array}{l} x_3 \approx 12{,}38 \\ x_4 \approx 17{,}62 \end{array}\right\}$ 5,23 h

$\Rightarrow$ 10,5 h

D3. Figuren visar grafen till en trigonometrisk funktion med några mått angivna.



OBS! Det är helt valfritt om man väljer grader eller radianer. Det påverkar värdet på K men inte V, A och B

Grafen kan skrivas på formen $f(x) = A\cos(k(x+v)) + B$.

Bestäm möjliga värden på de fyra konstanterna A, B, k och v. (0/1/2)

Svara med en decimals noggrannhet!

En period $= 3+4+3=10 \Rightarrow$ $k_r = \frac{2\pi}{10} \approx 0,63$ (vid radianer)

$k_g = \frac{360}{10} = 36$ (vid grader)

Väljer att se det som en $-\cos$ $\Rightarrow$ Minimum finns vid $x = 5,5$

$\Rightarrow$ $V = -5,5$

$f(x) = A\cos\left(\frac{2\pi}{10}(x-5,5)\right) + B$ (radianer)

För A och B, välj två punkter på grafen: ex: $(4,0)$

$(5,5;-3)$

$(4,0) \Rightarrow \begin{cases} 0 = A\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{10}(4-5,5)\right)+B \\ -3 = A\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{10}(5,5-5,5)\right)+B \end{cases}$

$(5,5;-3) \Rightarrow$

Lös som ett ekv. system $\Rightarrow$ $\begin{cases} A \approx -7,3 \\ B \approx 4,3 \end{cases}$

OBS!! Det finns även fler möjliga svar!

$\Rightarrow f(x) = -7,3\cos\left(\frac{2\pi}{10}(x-5,5)\right) + 4,3$