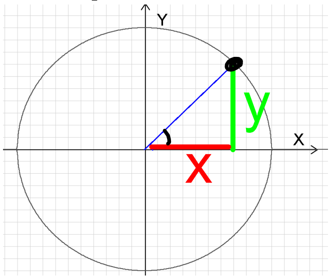
Kapitel 2

Trigonometri och grafer

sinus- och cosinuskurvor

Repetition:



Varje punkt på enhetscirkel har ett x-värde och ett y-värde som fås genom sinus och cosinus av vinkeln:

$x = \cos v$
$y = \sin v$

cos och sin är periodiska med perioden 360°:

$\cos v = \cos (v \pm n \cdot 360^\circ)$
$\sin v = \sin (v \pm n \cdot 360^\circ)$

Grafen till y = sin (x)

Om man betraktar y = sin (x) som en funktion, hur ser då dess funktionsgraf ut?

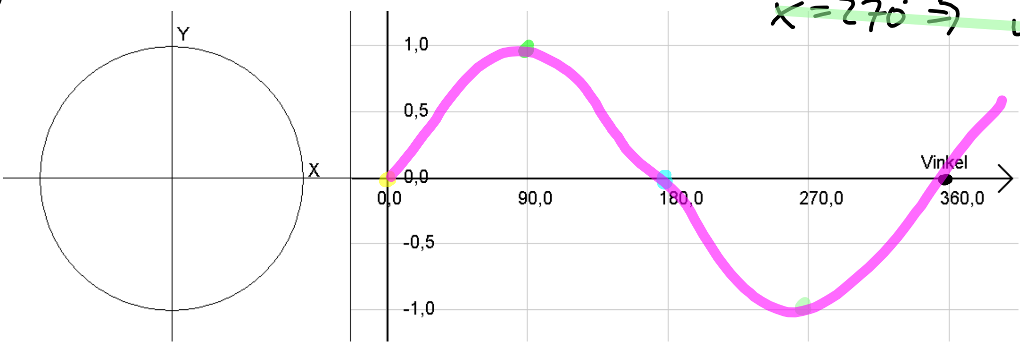
Utgå från några kända punkter:

$x = 0^\circ \Rightarrow y = 0$

$x = 90^\circ \Rightarrow y = 1$

$x = 180^\circ \Rightarrow y = 0$

$x = 270^\circ \Rightarrow y = -1$



Grafen till y = cos (x)

Samma sak med y = cos (x), hur ser dess funktionsgraf ut?

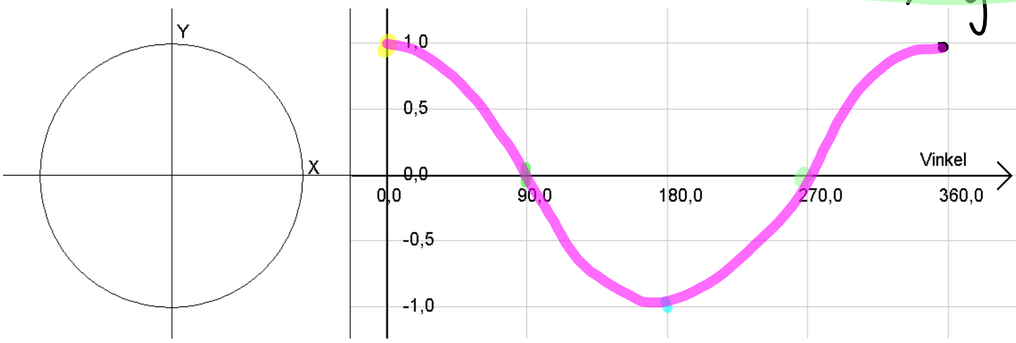
Utgå från kända vinklar:

$x = 0° \Rightarrow y = 1$

$x = 90° \Rightarrow y = 0$

$x = 180° \Rightarrow y = -1$

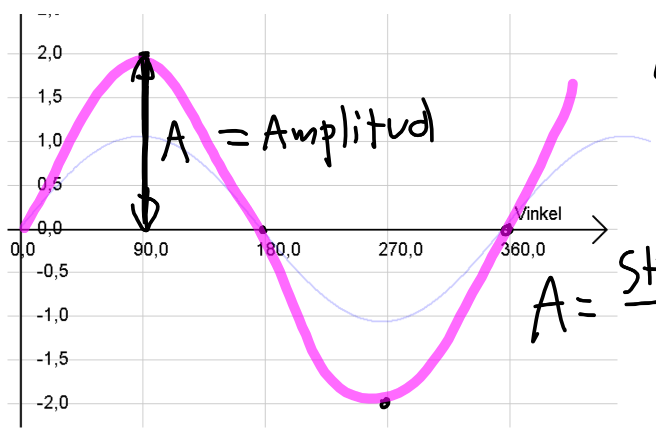
$x = 270° \Rightarrow y = 0$



Hur ser grafen till $y = A \cdot \sin(x)$ ut?

Värdena blir A gånger större!

T.ex
$A = 2$

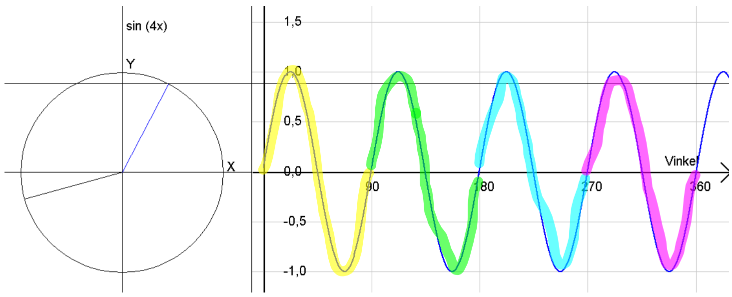


Amplituden går att beräkna:

$$A = \frac{\text{Största värde} - \text{Minsta värde}}{2}$$

...och till y = sin (k·x)?

sin(k·x) gör k gånger fler varv jämfört med sin(x) $\Rightarrow$ Grafen består av k gånger fler "∿".



Period

Vinkeln för en "∿" kallas perioden

Sin(4x) har 4 st "∿" på 360°

$\Rightarrow k = \frac{360°}{\text{Period}}$

"Då k är 2 blir varje period hälften så lång som 360°"

Exempel 1: Bestäm amplitud och period till nedanstående funktioner

a) $y = 3 \cdot \sin(3x)$

b) $y = 12 \cdot \cos(0{,}4x)$

Jämför med $y = A \cdot \sin(k \cdot x)$

a) $y = 3 \cdot \sin(3 \cdot x)$

Amplitud $= 3$

Perioden fås via sambandet: Period $= \frac{360^\circ}{k}$

Period $= \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$

b) Samma tänk för cos

Jämför med $y = A \cdot \cos(k \cdot x)$

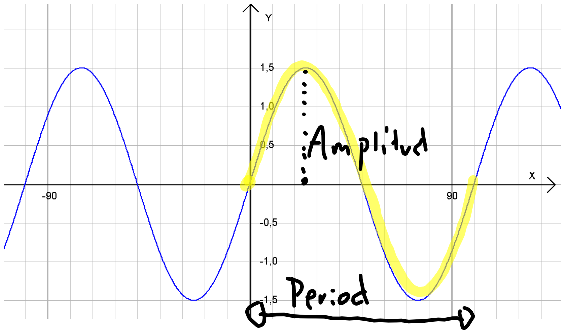
$y = 12 \cdot \cos(0{,}4 \cdot x)$

Amplitud $= 12$

Period $= \frac{360^\circ}{0{,}4} = 900^\circ$

Exempel 2: Skriv kurvorna nedan på formen $y = A \cdot \sin(k \cdot x)$

a)



Börja med perioden:

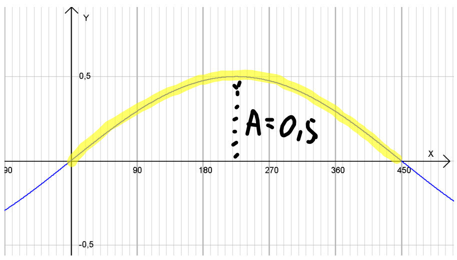
Perioden = "∿" = 100°

Amplituden fås via "höjden" ⇒ $A = 1,5$

$k = \frac{360°}{\text{Perioden}} = \frac{360°}{100°} = 3,6$

$\Rightarrow y = 1,5 \cdot \sin(3,6 \cdot x)$

b)



Vi ser inte en hel period: Däremot ses "⌒" som svarar mot halva perioden

Perioden = 2 · "⌒" =

$2 \cdot 450° = 900°$

$\Rightarrow k = \frac{360°}{900°} = 0,4$

A = "Höjden över mitten"

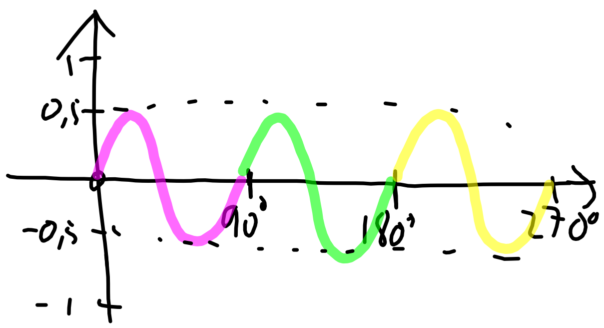
$= 0,5 \Rightarrow$

$y = 0,5 \cdot \sin(0,4 \cdot x)$

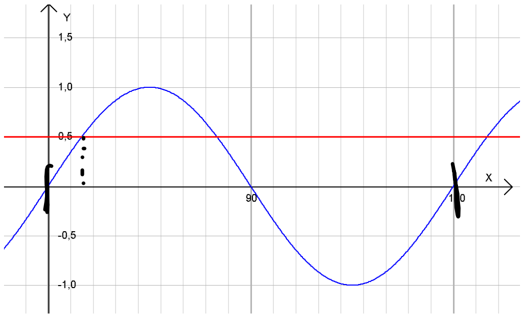
Exempel 3: Skissa för hand grafen tre perioder av kurvan
$y = 0{,}5 \cdot \sin(4x)$

En period är: $\frac{360^\circ}{k} = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ \Rightarrow$

Amplituden = 0,5



Exempel 4: Nedanstående bild visar lösningarna till en trigonometrisk grundekvation i intervallet $0^o < x < 180^o$.
Ange ekvationen, och lös den algebraiskt.



Ekvationer innebär grafiskt att bestämma skärningspunkter mellan 2 funktioner

Blå: Sinuskurva med $A = 1$

$k = \frac{360^\circ}{180^\circ} = 2$

$\Rightarrow 1 \cdot \sin(2x)$

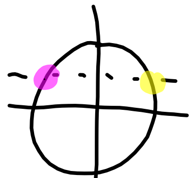
Röd: Horisontell linje med $y = 0,5$

$\Rightarrow 0,5$

Blå = Röd

$\sin(2x) = 0,5$

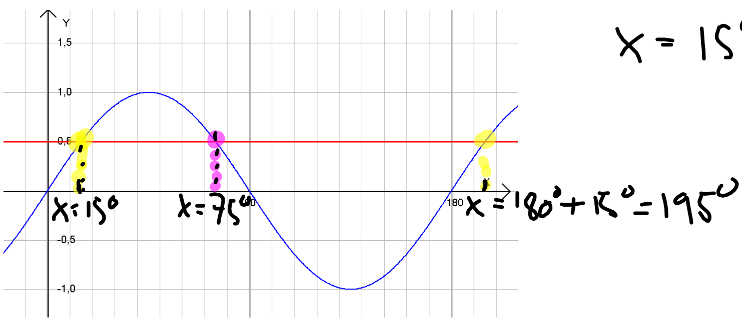
Algebraisk lösning: $\sin(\ ) = 0,5$



$(\ )_1 = 30^\circ + n \cdot 360^\circ$ $\quad (\ )_2 = 150^\circ + n \cdot 360^\circ$

$2x = 30^\circ + n \cdot 360^\circ$ $\quad 2x = 150^\circ + n \cdot 360^\circ$

$x = 15^\circ + n \cdot 180^\circ$ $\quad x = 75^\circ + n \cdot 180^\circ$

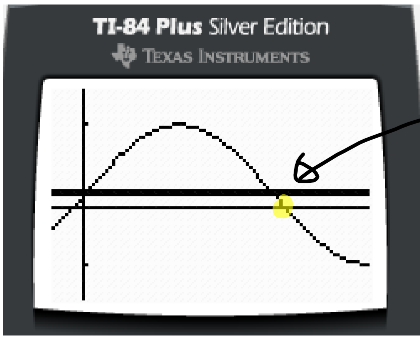


Exempel 5: Lös ekvationen sin (3x) = -0.2 grafiskt i intervallet

$0^\circ \leq x \leq 90^\circ$

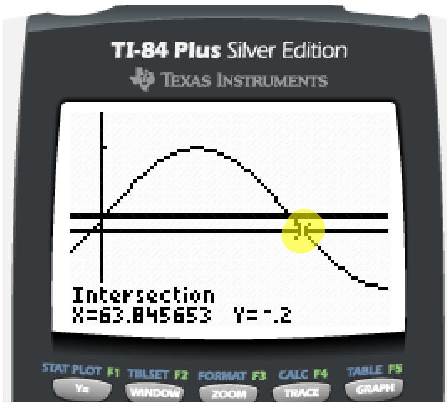
Principen är att hitta skärningspunkterna mellan $Y_1 = \sin(3x)$ och

$Y_2 = -0,2$ mha miniräknaren:



Det sökta x-värdet

Skärningen fås lättast med CALC-INTERSECT



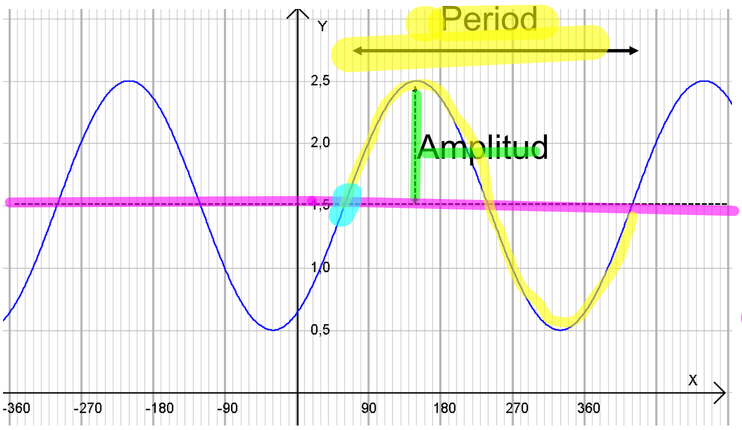
$x \approx 63,85^\circ$

Ekvationen för en sinusformad kurva

(s. 60 - 61)

Repetition:

För funktionen y = A sin (k·(x - v)) + d gäller att grafen har följande utseende:



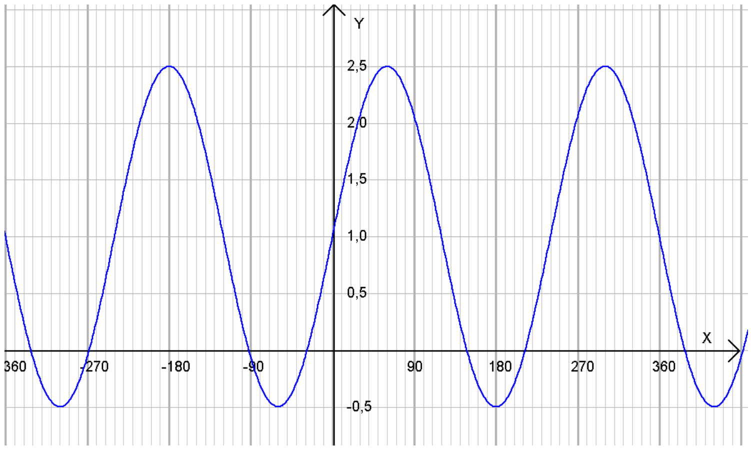
$$\text{Period} = \frac{360^\circ}{k}$$

Amplitud = A

"Nya nollan" = v°

Mittlinje = d

Exempel 1: Nedanstående graf visar en funktion av typen
$A \cdot \sin(k \cdot x) + d$
Bestäm konstanterna A, k och d



$A\sin(kx)+d$

Eftersom det bara står "kx" i ( ) är "Nyanollan" $= 0 \Rightarrow$ Ingen förskjutning i x-led:

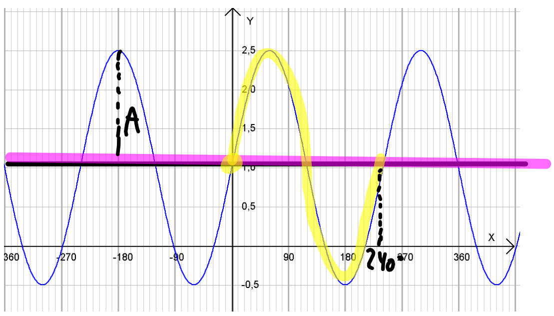
Vi behöver bestämma $A =$ Amplituden

$k = \frac{360}{\text{Perioden}}$

$d =$ Mittlinjen

Börja med d:

$d = 1$



Amplituden ges av höjden över mitten:

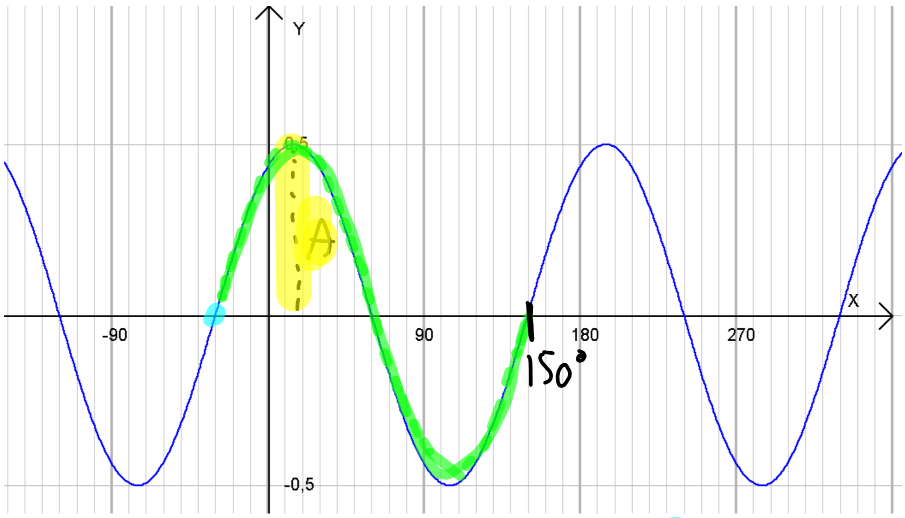
$A = 2{,}5 - 1 = 1{,}5$

Perioden ger k-värdet: Period = "∿" $= 240°$

$\Rightarrow k = \frac{360°}{240°} = 1{,}5$

$$\Rightarrow y = A \cdot \sin(k \cdot x) + d =$$
$$= 1{,}5 \cdot \sin(1{,}5 \cdot x) + 1$$

Exempel 2: Nedanstående graf visar en funktion av typen
A·sin (k·(x - v))
Bestäm konstanterna A, k och v



"Asin(k(x−v))"
⇒ "d = 0" ⇒
Ingen förskjutning i y-led:
Vi behöver A, k och "Nyanollan" = v

Börja med NyaNollan: "Där grafen skär mittlinjen och är på väg uppåt"

"x = −30" ⇒ v = −30°

Amplitud och Period på vanligt sätt:

A = 0,5

Period ger k-värdet:

$$k = \frac{360°}{\text{Period}} = \left[\begin{array}{l} \text{Period} = \text{"Från } -30° \text{ till } +150°\text{"} \\ \Rightarrow 180° \end{array} \right]$$

$$= \frac{360°}{180°} = 2$$

$$\Rightarrow y = A \cdot \sin(k(x - v)) =$$

$$= 0{,}5 \sin(2(x - (-30°)))$$

Exempel 3: Skissa funktionen

y = 5 + 3·sin (2x - 90)

$$y = 5 + 3\cdot\sin(2x - 90^\circ) = \left[\begin{array}{l}\text{"Skriv på rätt sätt"} \\ A\cdot\sin(k(x-v)) + d\end{array}\right]$$

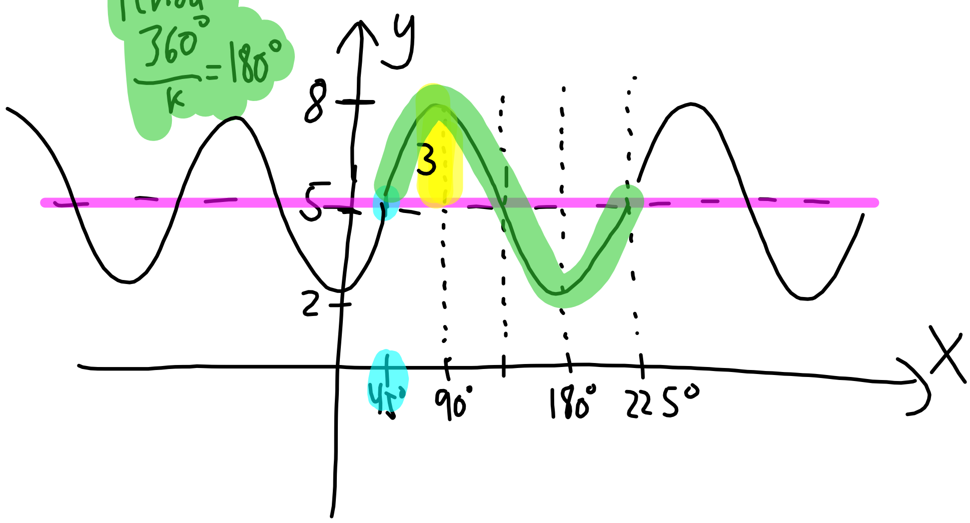
$$= 3\cdot\sin(2(x - 45^\circ)) + 5$$

$A = 3$

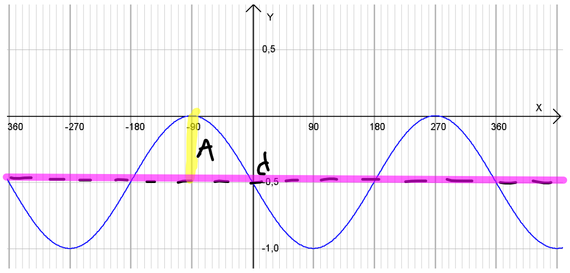
$k = 2 \Rightarrow$ Period $= \frac{360^\circ}{k} = 180^\circ$

"Nyanollan" $= 45^\circ$

$d = 5$



Exempel 4: Vilka av alternativen A - E ger grafen nedan?



A: $y = \sin(2x) - 0{,}5$

B: $y = 0{,}5 \cdot \sin(x - 180°) - 0{,}5$

C: $y = -0{,}5 + 0{,}5 \cdot \cos(x + 90°)$

D: $y = \sin(x - 180°)$

E: $y = -0{,}5 - 0{,}5 \cdot \sin(x)$

Börja med d och A: $d = -0{,}5$

$A = 0{,}5$

Stryk alla med fel d el. A:

A: $y = \sin(2x) - 0{,}5$

B: $y = 0{,}5 \sin(x - 180°) - 0{,}5$

C: $y = -0{,}5 + 0{,}5 \cos(x + 90°)$

D: $y = \sin(x - 180°)$

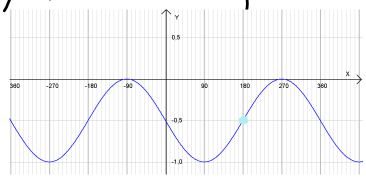
E: $y = -0{,}5 - 0{,}5 \sin(x)$

$\Rightarrow$ A och D går bort (fel d el. A)

För B, C, E: Undersök "Nya Nollan" och jämför med grafen:

B: $0{,}5 \cdot \sin(x - 180°) - 0{,}5$

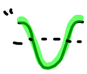
$+180°$



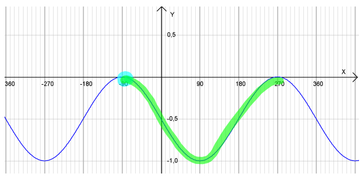
B stämmer!

C: "$\cos(x + 90°)$"

(Grundformen för cos: "



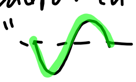
") $\Rightarrow$ Nya Nollan $= -90°$



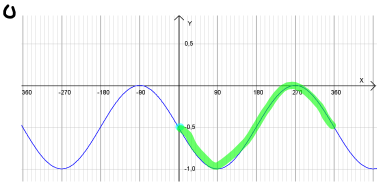
$\Rightarrow$ C stämmer!

E: "$-\sin(x)$" $\Rightarrow$ Nya Nollan $= 0°$

(Grundformen för $-\sin$ "



")



$\Rightarrow$ E stämmer!

$\Rightarrow$ B, C och E ger grafen!