

FACIT

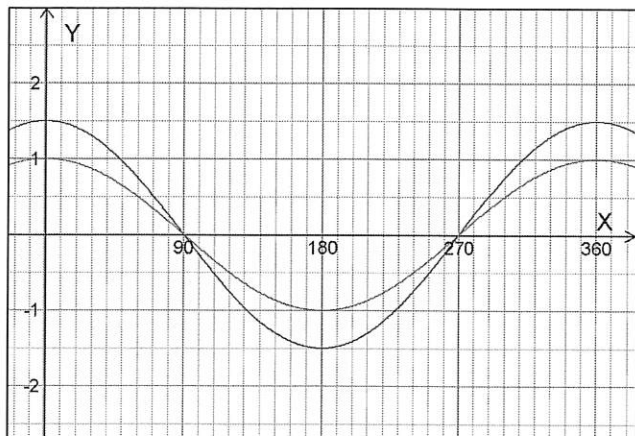
2.4 Summan av trigonometriska funktioner och grafer till funktionssummor

Del 1 – Utan digitalt hjälpmedel

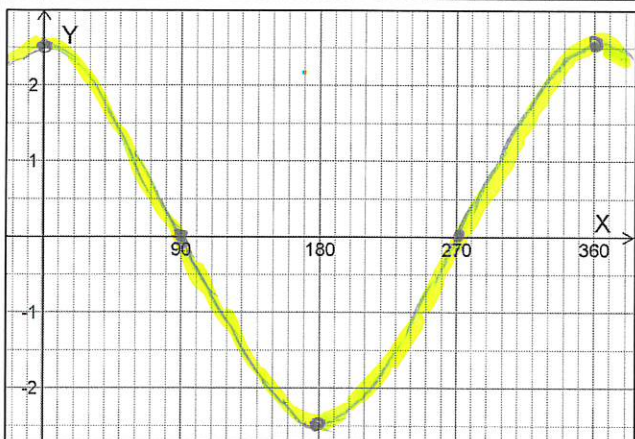
1. I det övre koordinatsystemet visas graferna till två trigonometriska funktioner.

Rita i det nedre koordinatsystemet **summan av dessa**

(2/0/0)



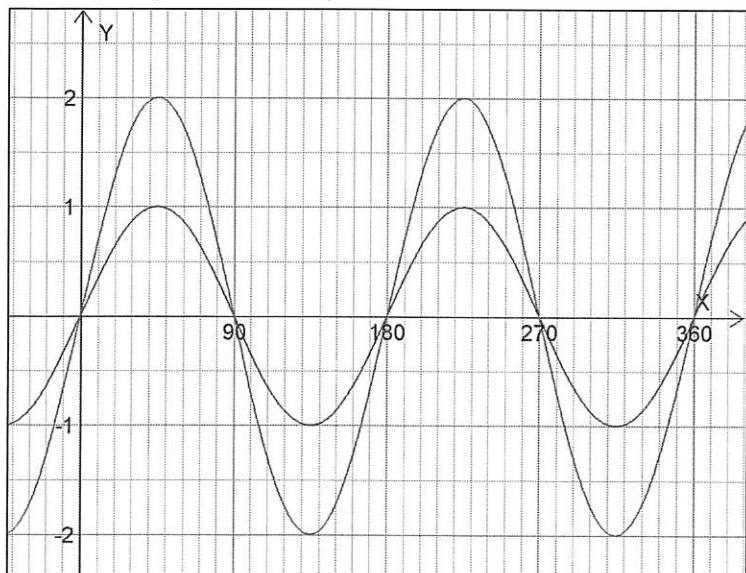
Båda funktionerna är cos-funktioner med samma period \Rightarrow
 $1 \cos(x)$ och $1,5 \cos(x)$
 \Rightarrow Summan: $2,5 \cos(x)$



2. I koordinatsystemet nedan visas graferna till två trigonometriska funktioner.

Ta fram ett **funktionsuttryck** för **summan av dessa**

(3/0/0)



Två st. sinusfunktioner med samma period.
Perioden = 180°

$$\Rightarrow k = \frac{360}{180} = 2$$

Amplituderna

$$A_1 = 2 \quad A_2 = 1$$

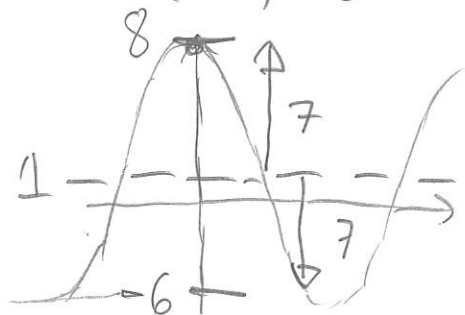
$$\text{Summan} = 2 \sin(2x) + 1 \sin(2x) = 3 \sin(2x)$$

3. Bestäm största och minsta värdet av funktionen

$$f(x) = 2 \cos(3x) + 5 \cos(3x) + 1$$

(2/0/0)

$$2 \cos(3x) + 5 \cos(3x) + 1 = 7 \cos(3x) + 1$$



Största värdet = 8

Minsta värdet = -6

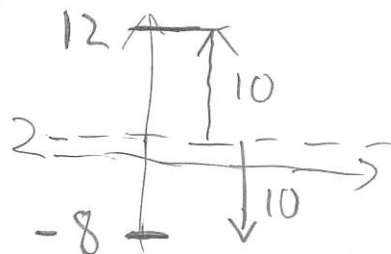
4. Bestäm största och minsta värdet av funktionen

$$f(x) = 8 \sin(x) + 6 \cos(x) + 2$$

(1/1/0)

Sin och cos med samma period kan summeras.
 enligt $a \sin(x) + b \cos(x) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi)$
 \Rightarrow Gemensam amplitud = $\sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$

$$10 \sin(x + \varphi) + 2$$



Största: 12

Minsta: -8

5. De två vännerna Zinah och Cosmin diskuterar egenskaper hos funktionen $f(x) = 3 \sin(3x) + 4 \cos(6x)$

Zinah påstår att största värdet är 5 medan Cosmin säger att största värdet inte går att bestämma utan digitalt hjälpmedel.

Vem har rätt och hur kan de båda ha resonerat?

$$k_1 = 3 \Rightarrow P_1 = \frac{360}{3} = 120^\circ$$

$$k_2 = 6 \Rightarrow P_2 = \frac{360}{6} = 60^\circ$$

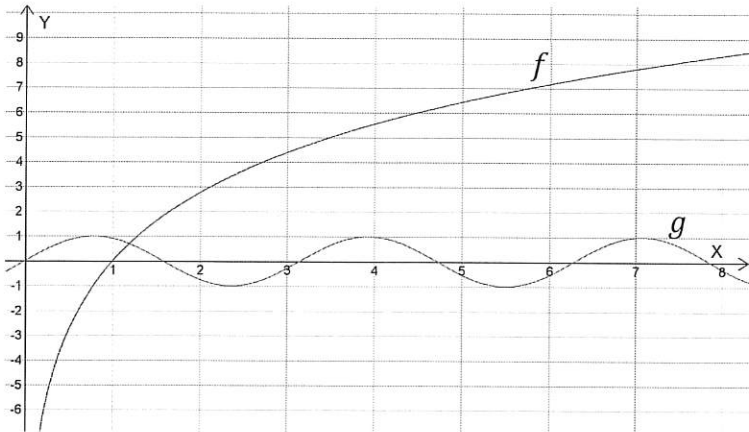
(0/2/0)

Om perioderna varit samma skulle den gemensamma amplituden kunnat bestämmas via $A = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$, MEN!
 Här är perioderna olika (120° resp. 60°), vilket ger en klart mer komplicerad summa som behöver specialstuderas med dig. verktyg \Rightarrow Cosmin har rätt.

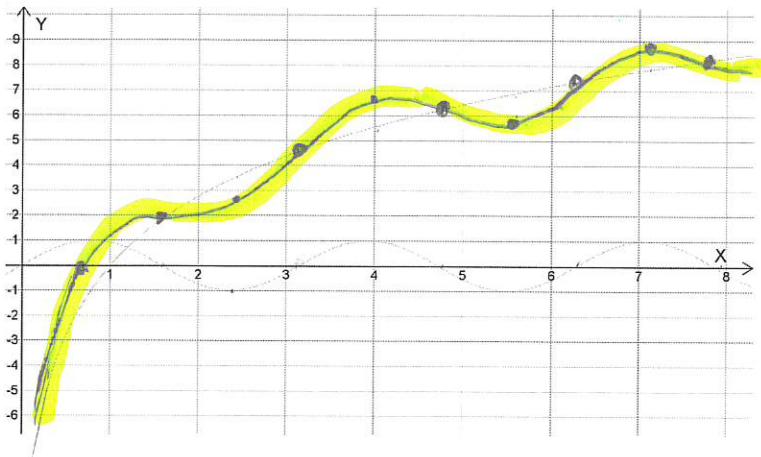
6. Figuren nedan visar graferna till funktionerna

$$f(x) = 4 \cdot \ln(x)$$

$$g(x) = \sin(2x)$$



Skissa i figuren nedan grafen till funktionen $h(x) = f(x) + g(x)$
(Som hjälp finns de båda graferna till f och g svagt inritade)



"Mamma $4 \ln(x)$
Pappa $\sin(2x)$ "
 \Rightarrow Summan fås genom att lägga ihop egenskaperna hos båda
(0/2/0)

"föräldrafunktionerna"
 \Rightarrow En $\sin(2x)$ som slingrar sig kring $4 \cdot \ln(x)$ -grafan

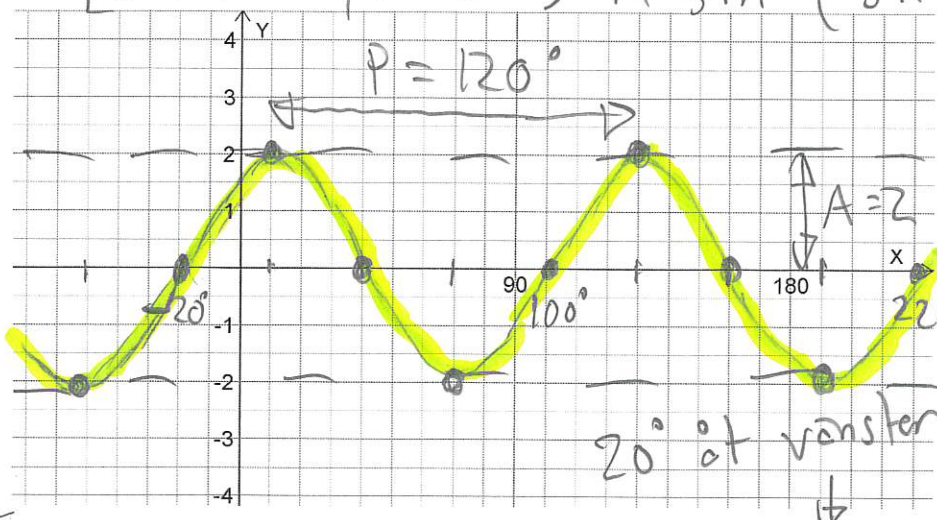
7. Utgå från de trigonometriska funktionerna

$$f(x) = \sqrt{3} \cos(3x) \text{ och } g(x) = \sin(3x) = 1 \cdot \sin(3x)$$

Skissa i koordinatsystemet nedan grafen till funktionen

$$h(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{3} \cos(3x) + 1 \sin(3x) = \quad (0/2/1)$$

[samma period $\Rightarrow A \sin(3x + \nu)$]



$$A = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$$

$$\tan \nu = \frac{\sqrt{3}}{1} \Rightarrow$$

$$\nu = [\text{Tabell på FB}] = 60^\circ$$

$$2 \sin(3x + 60^\circ) =$$

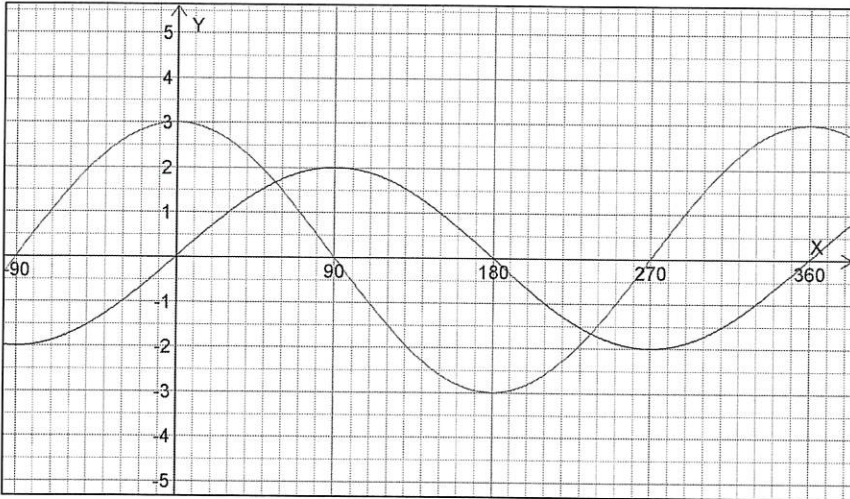
$$= [3x + 60^\circ = 3(x + 20^\circ)] = 2 \cdot \sin(3(x + 20^\circ))$$

$$\text{Amp} = 2$$

$$\text{Period} = \frac{360}{3} = 120^\circ$$

Del 2 – Med digitalt hjälpmedel

D1. I figuren nedan visas graferna till två trigonometriska funktioner, f och g



$$f = 3 \cos(x)$$

$$g = 2 \sin(x)$$

Summan av de båda funktionerna kan skrivas på formen $A \sin(x + v)$

Bestäm värden på konstanterna A och v . Svara med 2 decimaler!

(3/0/0)

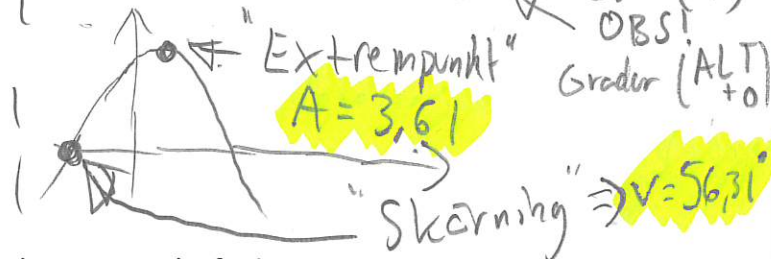
→ Via formeln

$$A = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13} \approx 3,61$$

$$v = \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) \approx 56,31^\circ$$

→ Via Geogebra-verktyg

Skriv in " $3 \cos(x) + 2 \sin(x)$ "



D2. Triggolina är förvirrad kring detta med summan av trigonometriska funktioner.

- " $4 \sin(2x) + 3 \sin(2x)$ har tillsammans amplituden 7, eftersom $4 + 3 = 7$. Då borde väl rimligtvis $4 \sin(2x) + 3 \cos(2x)$ också ha amplituden 7?"

Förklara för Triggolina vad skillnaden mellan dessa båda fall är.

(1/1/0)

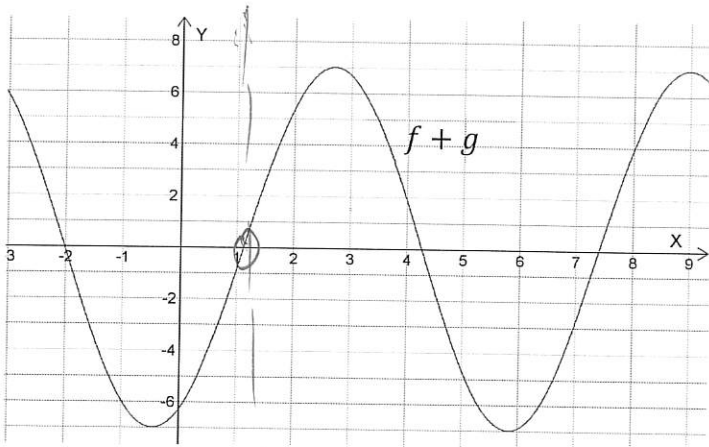
I första fallet, med 2 st sinus kurvor med samma period är de båda funktionerna i fas. \Rightarrow Största värdet sker för samma x -värde. Högsta värde sker samtidigt \Rightarrow kan summeras!



I andra fallet, med en sin- och en cos är de i ofas \Rightarrow Största värdet sker vid olika x -värden \Rightarrow Summens största värde blir lägre



- D3. De två funktionerna f och g har summerats.
Summan av de båda visas i figuren visas nedan.



Enl. figuren fås att
 $A=7$ och att
 grafen är förskjuten
 åt höger \Rightarrow
 v negativt.

För funktionen f gäller att $f(x) = 3\sin(x)$ (där x anges i radianer)

Bestäm ett funktionsuttryck för funktionen $g(x)$

Svara exakt, eller med 2 decimaler!

$$3\sin(x) + b\cos(x) = 7\sin(x+v) \Rightarrow \sqrt{3^2 + b^2} = 7 \quad (1/2/0)$$

$$b = \pm\sqrt{40}$$

$$v = \tan^{-1}\left(\frac{\pm\sqrt{40}}{3}\right) \Rightarrow v_1 \approx 1,13$$

$$v_2 \approx -1,13$$

Neg. $v \Rightarrow b = -\sqrt{40} \Rightarrow g(x) = -\sqrt{40}\cos(x)$
 $\approx -6,32\cos(x)$

- D4. I ekvationen nedan är a och v positiva konstanter.

$$a \cdot \sin(x) + (a+2) \cdot \cos(x) = 8 \cdot \sin(x+v)$$

Bestäm ett exakt värde på v

$$A=8 \Rightarrow \sqrt{a^2 + (a+2)^2} = 8$$

Lös antingen för hand
 eller via kommandot "Lös"

$$\text{LÖS } (\sqrt{x^2 + (x+2)^2} = 8)$$

$$\rightarrow (x = -1 - \sqrt{31}, x = -1 + \sqrt{31})$$

$$a \text{ pos} \Rightarrow a = -1 + \sqrt{31}$$

$$v \text{ fås via } \tan(v) = \frac{a+2}{a} = \frac{-1 + \sqrt{31} + 2}{-1 + \sqrt{31}}$$

$$\tan v = \frac{1 + \sqrt{31}}{-1 + \sqrt{31}} \Rightarrow v = \tan^{-1}\left(\frac{1 + \sqrt{31}}{-1 + \sqrt{31}}\right)$$