FACIT

2.5 Trigonometriska ekvationer

Del 1 – Utan digitalt hjälpmedel

1. Hitta *två valfria* lösningar till ekvationen. *Svara i **radianer**!* (1/0/0)

$$\sin(x) = \frac{1}{2}$$

FB:s tabell $\Rightarrow$

	$30°$, $\frac{\pi}{6}$						$150°$, $5\pi/6$	
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0

$\Rightarrow$ ex: $x_1 = \frac{\pi}{6}$ $x_2 = \frac{5\pi}{6}$ (men alla varianter $\pm 2\pi = \frac{12\pi}{6}$ funkar)

2. Hitta *två valfria* lösningar till ekvationen. *Svara i **grader**!* (1/0/0)

$$\cos(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Samma tank som i uppgift 1 men leta på cos-raden för att hitta x_1

FB:s tabell $\Rightarrow$

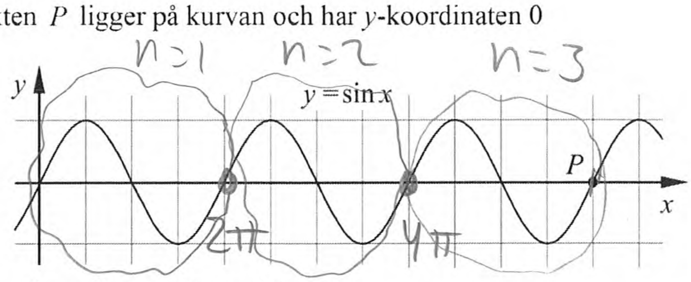
			$45°$			
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	...

$\Downarrow$

ex: $x_1 = 45°$
$x_2 = -45°$ (eller alla varianter $\pm 360°$)

3. Uppgiften nedan är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften (1/0/0)

Figuren visar kurvan $y = \sin x$ och en punkt P.
Punkten P ligger på kurvan och har y-koordinaten 0



Ange x-koordinaten för punkten P.
Svara i radianer.

P motsvarar lösningen till $\sin x = 0$

3 perioder in $x_1 = 0 + n \cdot 2\pi$

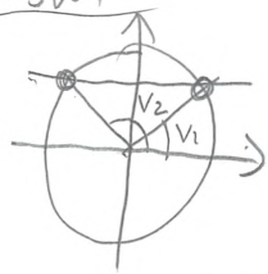
$$x = 0 + 3 \cdot 2\pi = 6\pi$$

4. Hitta *de båda lösningarna i en period* till ekvationen *Svara i* ***grader****!* (2/0/0)

$\sin(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Algebraiskt

Enhetscirkeln:



Tabell på FB:

$v_1 = 60°$

$v_2 = 180 - 60° = 120°$

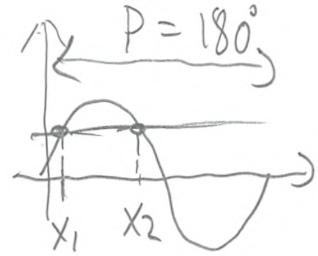
$2x_1 = 60°$

$x_1 = 30°$

$2x_2 = 120°$

$x_2 = 60°$

Grafiskt



$\sin(2x)$

$p = \frac{360}{2} = 180$

x_1 fås via FB:s tabell

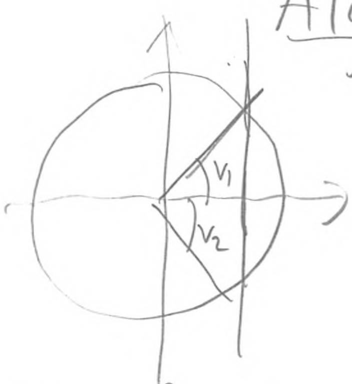
$2x_1 = 60° \Rightarrow x_1 = 30°$

$x_2 = P/2 - x_1 = 90 - 30 = 60°$

5. Hitta *alla* lösningar till ekvationen. *Svara i* ***radianer****!* (1/1/0)

$cos(4x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Algebraiskt



V_1 fås ur tabell på FB:

$v_1 = \frac{\pi}{6} \Rightarrow$

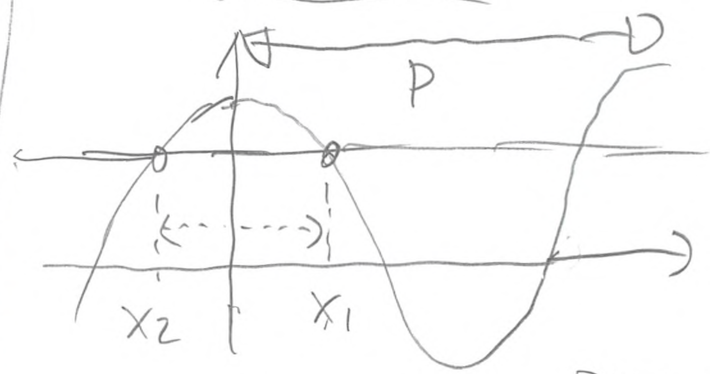
$4x_1 = \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi$

$x_1 = \frac{\pi}{24} + n \cdot \frac{\pi}{2}$

$V_2 = -V_1 \Rightarrow$

$x_2 = -\frac{\pi}{24} + n \cdot \frac{\pi}{2}$

Grafiskt



$\cos(4x) \Rightarrow P = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

X_1 fås via tabellen på FB:

$4x_1 = \frac{\pi}{6} \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{24}$

$x_2 = -x_1$ pga symmetri kring y-axeln

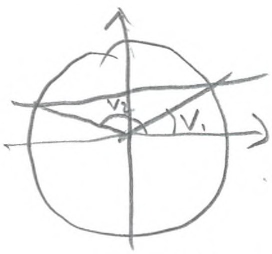
Alla lösningar:

$x_1 = \frac{\pi}{24} + n \cdot \frac{\pi}{2}$ $x_2 = -\frac{\pi}{24} + n \cdot \frac{\pi}{2}$

6. Hitta *alla* lösningar till ekvationen. *Svara i **grader**!* (2/1/0)

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Algebraiskt



v_1 fås via tabellen på FB:

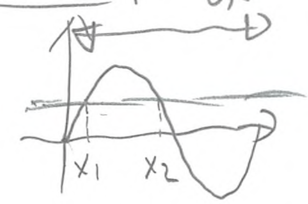
$v_1 = 45 + n\cdot 360°$ $\quad$ $v_2 = 180 - 45 + n\cdot 360°$

$\frac{x_1}{2} = 45 + n\cdot 360°$ $\quad$ $\frac{x_2}{2} = 135 + n\cdot 360°$

$x_1 = 90° + n\cdot 720°$ $\quad$ $x_2 = 270 + n\cdot 720°$

Grafiskt $P = \frac{360}{0,5} = 720°$

$\sin\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow$



x_1 fås via tabellen på FB

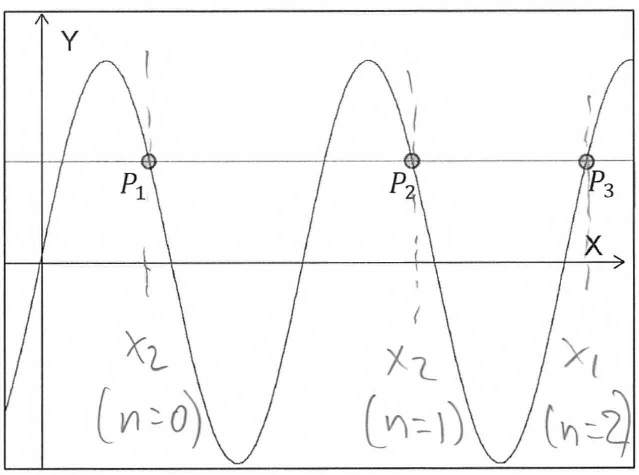
$\frac{x_1}{2} = 45° \Rightarrow x_1 = 90°$

$x_2 = \frac{P}{2} - x_1 = 360 - 90 = 270°$

Alla lösn: $x_1 = 90° + n\cdot 720$

$x_2 = 270° + n\cdot 720$

7. Nedan visas graferna till funktionen $f(x) = \sin(3x)$ och $g(x) = \frac{1}{2}$ samt tre av skärningspunkterna mellan dessa, P_1, P_2 och P_3



Bestäm x-koordinaterna för punkterna P_1, P_2 och P_3 om x *anges i **grader.*** (2/1/0)

Ta fram alla lösningar, antingen grafiskt eller algebraiskt, till ekv: $\sin(3x) = \frac{1}{2}$

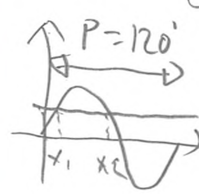
Algebraiskt

FB $\Rightarrow v_1 = 30°$ $\quad$ $v_2 = 180 - v_1 = 150°$

$3x_1 = 30° + n\cdot 360°$ $\quad$ $3x_2 = 150 + n\cdot 360°$

$x_1 = 10° + n\cdot 120°$ $\quad$ $x_2 = 50° + n\cdot 120°$

Grafiskt



x_1 fås via FB:

$3x_1 = 30°$

$x_1 = 10°$

x_2 ges av $P/2 - x_1 = 50°$

$x_1 = 10° + n\cdot 120°$ $\quad$ $x_2 = 50 + n\cdot 120°$

P_1 motsvarar $n=0$ på x_2: $50°$

P_2 motsvarar $n=1$ på x_2: $170°$

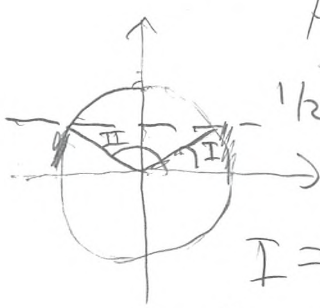
P_3 motsvarar $n=2$ på x_1

$250°$

8. Nedanstående uppgift är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften. (0/1/1)

För vilka vinklar i intervallet $0° < v < 90°$ gäller att $\sin 3v < \frac{1}{2}$?

Algebraiskt



1/2 I och II fås via FB:s tabell

$I = 30°$ $II = 150°$

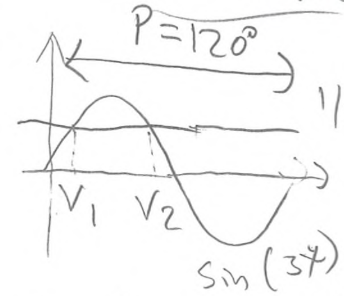
$3v_1 = 30°$ $3v_2 = 150°$

$v_1 = 10°$ $v_2 = 50°$

"Mindre än 1/2" $\Rightarrow$

$v > 50°$ $v < 10°$

Grafiskt



v_1 och v_2 fås via FB

$3v_1 = 30°$ $3v_2 = 150°$

$v_1 = 10°$ $v_2 = 50°$

"Mindre än 1/2"

$\Rightarrow$ Till vänster om v_1 eller till höger om v_2

$\Rightarrow$ $v < 10°$ $v > 50°$

~~10.~~ 9. Hitta alla lösningar i intervallet $0 \leq x \leq \pi$ till ekvationen

$\cos(2x) = \cos(5x)$ där x anges i ***radianer***. (0/2/1)

Ekvationer av typen "$\cos v_1 = \cos v_2$" eller "$\sin v_1 = \sin v_2$" kan bara lösas algebraiskt via två fall:

Fall 1: v_1 och v_2 är på samma plats i enhetscirkeln, MEN $\Rightarrow$ kan skilja i antal varv

$\Rightarrow v_1 = v_2 + n \cdot 2\pi \Rightarrow$

$5x_1 = 2x_1 + n \cdot 2\pi \Rightarrow 3x_1 = n \cdot 2\pi$

$x_1 = \frac{n \cdot 2\pi}{3}$

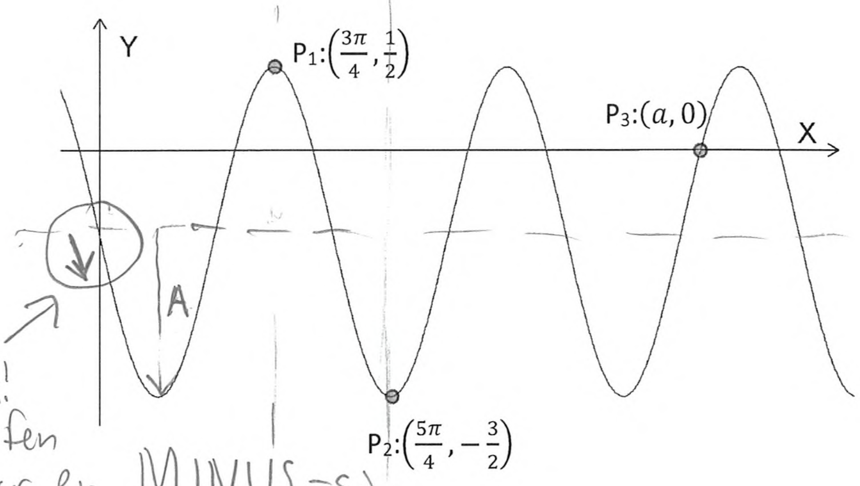
Fall 2: v_1 och v_2 är på olika sidor om x-axeln och kan skilja sig i antal varv $\Rightarrow$

$\Rightarrow v_1 = -v_2 + n \cdot 2\pi$

$5x_2 = -2x_2 + n \cdot 2\pi \Rightarrow 7x_2 = n \cdot 2\pi$

$x_2 = \frac{n \cdot 2\pi}{7}$

10. Nedan visas en trigonometrisk funktion på formen $A\sin(kx)+B$



B

OBS!! Grafen visar en MINUS-sin

Mellan max och min är det en halv period:

$$\frac{1}{2}P = \frac{5\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} = \frac{2\pi}{4}$$

$$P = \pi$$

a) Bestäm konstanterna A, k och B (1/1/0)

Mitten mellan max och min $= \dfrac{1/2 + (-\frac{3}{2})}{2} = -1/2$

$\Rightarrow B = -1/2$

OBS!! A är negativ pga "minus-sin"

Amplituden = (Avståndet mellan min och mittlinjen)

$= 1/2 - (-1/2) = 2/2 \Rightarrow A = -1$

$k = \dfrac{2\pi}{\text{perioden}} = \dfrac{2\pi}{\pi} = 2 \Rightarrow k = 2$

b) Bestäm talet a exakt (0/1/1)

Talet a motsvarar x-koordinaten för en av skärningarna mellan $-1\cdot\sin(2x) - 1/2$ och 0

$\Rightarrow$ Ekvationen: $-1\cdot\sin(2x) - \frac{1}{2} = 0$

Skriv om på standard form $\Rightarrow \sin(2x) = -\frac{1}{2}$

Algebraiskt:

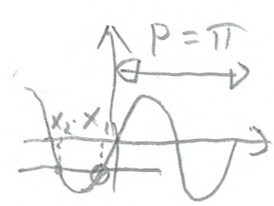
$2x_1 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$ $\quad$ $2x_2 = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$

$x_1 = -\frac{\pi}{12} + n\cdot\pi$ $\quad$ $x_2 = -\frac{5\pi}{12} + \pi\cdot n$

a motsvarar x_2 med $n=3$

$\Rightarrow a = -\frac{5\pi}{12} + \pi\cdot 3 = \frac{31\pi}{12}$

Grafiskt:



x_1 och x_2 fås (nästan) via FB:

$2\cdot x_1 = -\frac{\pi}{6}$ $\quad$ $2\cdot x_2 = -\frac{5\pi}{6}$

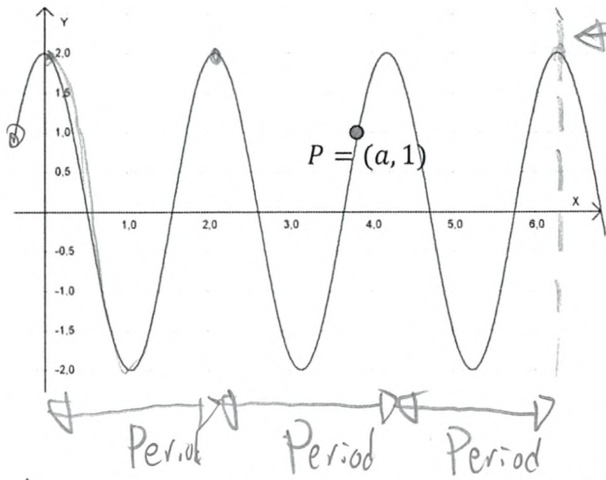
$x_1 = -\frac{\pi}{12}$ $\quad$ $x_2 = -\frac{5\pi}{12}$

$a = -\frac{5\pi}{12} + 3\cdot\pi = \frac{31\pi}{12}$

11. Nedanstående uppgift är ifrån ett gammalt Mattias-prov. Lös uppgiften. (0/2/1)

Grafen nedan visar en funktion på formen $y = A \cdot \cos(kx)$
där $\boldsymbol{A}$ **och** $\boldsymbol{k}$ **är heltal** och där x anges i radianer.
Bestäm exakt x-koordinaten a hos punkten P

$A=2$



$\leftarrow 2\pi \approx 6{,}28$

k heltal $\Rightarrow k=3$
(3 perioder på 2π)

$\Rightarrow 2\cos(3x)$

P motsvarar skärningen mellan $2\cos(3x)$ och $y=1$

$\Rightarrow$ Ekvationen $2\cos(3x)=1 \Rightarrow [/2] \Rightarrow \cos(3x) = 1/2$

$3 \cdot x_1 = \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{9} + n \cdot \frac{2\pi}{3}$

$3x_2 = -\frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi \Rightarrow x_2 = -\frac{\pi}{9} + n \cdot \frac{2\pi}{3}$

$\Rightarrow$ a motsvarar x_2 med $n=2$:

$a = \frac{11\pi}{9}$

12. Lös ekvationen

$\cos(3x + 60°) = \cos(2x + 20°)$

Svara i ***grader*** (0/1/2)

Samma princip som uppgift 9:

Fall 1: $v_1 = v_2 + n \cdot 360° \Rightarrow 3x_1 + 60° = 2x_1 + 20° + n \cdot 360$

$x_1 = -40° + n \cdot 360°$

Fall 2: $v_1 = -v_2 + n \cdot 360° \Rightarrow 3x_2 + 60° = -(2x_2 + 20°) + n \cdot 360°$

$3x_2 + 60° = -2x_2 - 20° + n \cdot 360°$

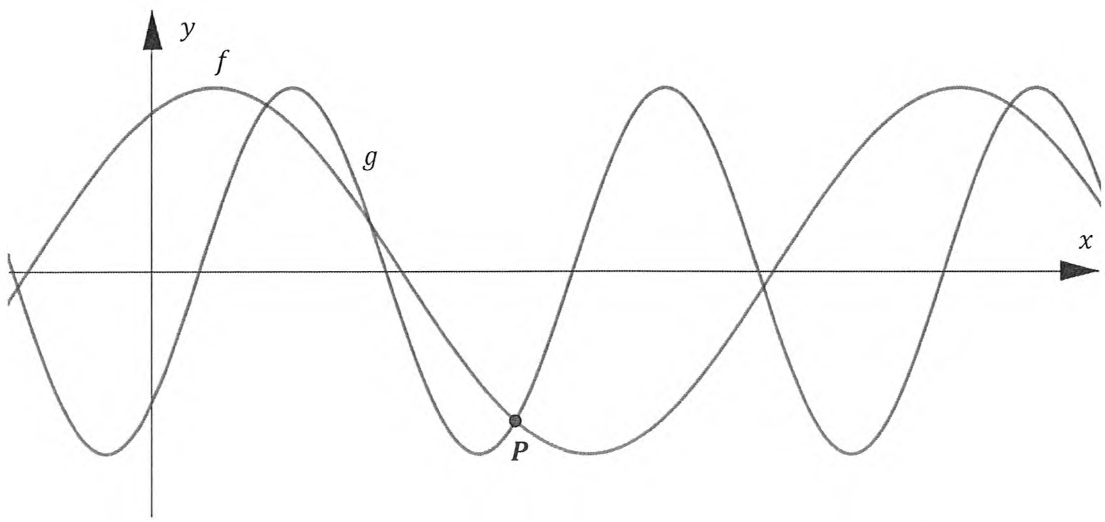
$5x_2 = -80° + n \cdot 360°$

$[/5] \quad x_2 = -16° + n \cdot 72°$

13. Figuren visar graferna till funktionerna f och g där

$$f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \qquad g(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$$

x-axeln är angiven i **radianer**.



I figuren har en av skärningspunkterna mellan graferna markerats som punkten $\boldsymbol{P}$.

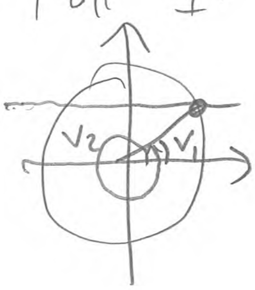
Ange x-koordinaten för denna punkt. (0/0/3)

P motsvarar en av lösningarna till "$f=g$"

$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$ $\left(\sin(v_1) = \sin(v_2)\right)$

Dessa kan bara lösas algebraiskt via att dela in i 2 fall:

Fall 1: V_1 är på samma plats som V_2 i enhetscirkeln men skiljs åt med varv:



"$V_1 = V_2 + n \cdot 2\pi$" $\Rightarrow$ $x_1 + \frac{\pi}{3} = 2x_1 - \frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi$

$$\Downarrow$$

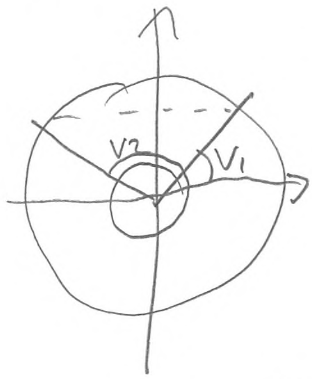
$$-x_1 = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$$

$$-x_1 = -\frac{3\pi}{12} - \frac{4\pi}{12} + n \cdot 2\pi$$

$$-x_1 = -\frac{7\pi}{12} + n \cdot 2\pi$$

$$x_1 = \frac{7\pi}{12} - n \cdot 2\pi$$

Fall 2: V_1 är PÅ ANDRA SIDAN OM Y-AXELN som V_2, ev. skild med flera varv.



"$V_2 = \pi - V_1 + n \cdot 2\pi$"

$$2x_2 - \frac{\pi}{4} = \pi - \left(x_2 + \frac{\pi}{3}\right) + n \cdot 2\pi$$

$$2x_2 - \frac{\pi}{4} = \pi - x_2 - \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$$

$$3x_2 = \pi + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$$

$$3x_2 = \frac{12\pi}{12} + \frac{3\pi}{12} - \frac{4\pi}{12} + n \cdot 2\pi$$

$$3x_2 = \frac{11\pi}{12} + n \cdot 2\pi$$

$$x_2 = \frac{11\pi}{36} + \frac{n \cdot 2\pi}{3}$$

Enligt grafen är P den tredje lösningen räknat från y-axeln. x_1 och x_2 ger följande.

	n=0	n=1	n=2
x_1	$\frac{21\pi}{36}$	$\frac{57\pi}{36}$	$\frac{83\pi}{36}$
x_2	$\frac{11\pi}{36}$	$\frac{35\pi}{36}$	$\frac{59\pi}{36}$

$$x_1 = \frac{21\pi}{36} + n \cdot \frac{36\pi}{36}$$

$$x_2 = \frac{11\pi}{36} + n \cdot \frac{24\pi}{36}$$

Dessa i storleksordning!

$\frac{11\pi}{36}$, $\frac{21\pi}{36}$, $\frac{35\pi}{36}$, $\frac{57\pi}{36}$, $\frac{59\pi}{36}$ ...
(1) (2) (3) (4)

X-värdet för P är $\frac{35\pi}{36}$

14. Triggy och Ekvia får i uppgift att lösa ekvationen

$$\sin(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$$

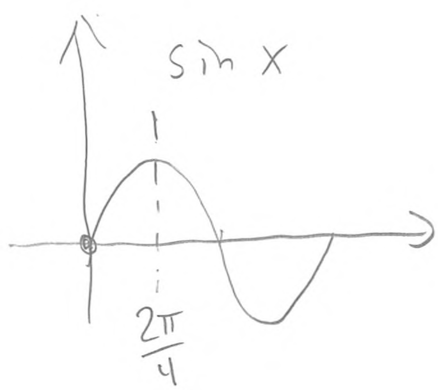
Triggy vet hur hon ska göra för att lösa ekvationer på formen *"sinus = sinus"* och *"cosinus = cosinus"*, men vet inte hur man gör för att lösa ekvationer på formen *"sinus = cosinus"*.

Ekvia säger då:

- *"Men är inte en sinusfunktion bara en förskjuten cosinusfunktion…? Då borde det ju gå att skriva att om ekvationen på formen cosinus = cosinus och sedan lösa den…?"*

Använd Ekvias tips och lös ekvationen (0/0/2)

Ekvia har rätt! sin x kan skrivas som en cos-funktion



$$\sin x = \cos\left(x - \frac{2\pi}{4}\right)$$

Förskjuten $\frac{2\pi}{4}\left(=\frac{\pi}{2}\right)$ åt höger

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$$

Samma princip som uppgift 9 och 12:

Fall 1: $v_1 = v_2 + n \cdot 2\pi \Rightarrow x_1 - \frac{\pi}{2} = 2x_2 - \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$

$$-x_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$$

$$x_1 = -\frac{\pi}{6} - n \cdot 2\pi$$

Fall 2: $v_1 = -v_2 + n \cdot 2\pi \Rightarrow x_2 - \frac{\pi}{2} = -\left(2x_2 - \frac{\pi}{3}\right) + n \cdot 2\pi$

$$x_2 - \frac{\pi}{2} = -2x_2 + \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$$

$$3x_2 = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi \Rightarrow x_2 = \frac{5\pi}{18} + n \cdot \frac{2\pi}{3}$$

Del 2 – Med digitalt hjälpmedel

D1. Hitta *tre valfria* lösningar till ekvationen. *Svara i **grader**!*

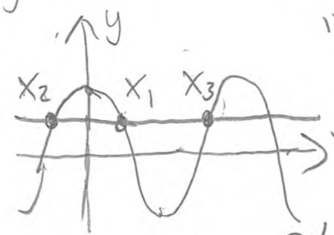
$\cos(x) = 0{,}4$ (1/0/0)

Kan lösas både „grafiskt och algebraiskt.

Grafiskt: "cos(x°)"

Grader skrivs Alt+O

"y = 0.4" ⇒



"Skärning" ⇓

$x_1 \approx 66{,}4°$

$x_2 \approx -66{,}4°$

ex: $x_3 \approx 293{,}6°$

Algebraiskt:

$x_1 = \cos^{-1}(0.4)$

$x_2 = -x_1$

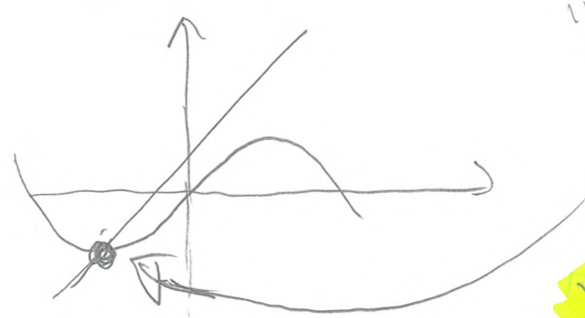
$x_3 = x_2 + 360°$

D2. Ekvationen $\sin(x) = x + 0{,}5$ där x anges i radianer har en lösning.
Bestäm denna lösning.
Svara med minst två decimalers noggrannhet (1/0/0)

Kan endast lösas grafiskt:

"sin(x)"

"x + 0.5" ⇒



"Skärning" ⇓ (−1.497; −0,997) ⇓

$x \approx -1{,}497\ldots \approx 1{,}50$

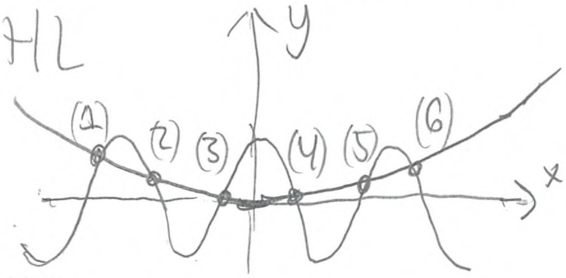
D3. Ekvationen $cos(3x) = 0{,}1x^2$ där x anges i radianer har flera lösningar.

a) Hur många lösningar har ekvationen? (1/0/0)

Antal lösningar motsvarar antalet skärningspunkter mellan VL och HL

"cos(3x)"

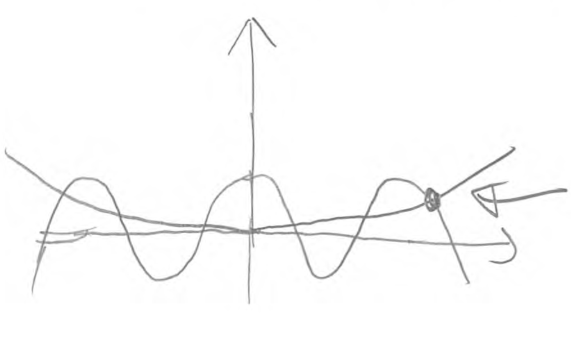
"0.1 x²" ⇒



⇒ 6 st

b) Bestäm den **största** av dessa lösningar. (1/0/0)
Svara med minst två decimalers noggrannhet

Den största lösningen är den med högst x-värde ⇒ Skärningspunkten längst till höger



"Skärning" ⇒ (2,411; 0,581) ⇓

$x \approx 2{,}411 \approx 2{,}41$

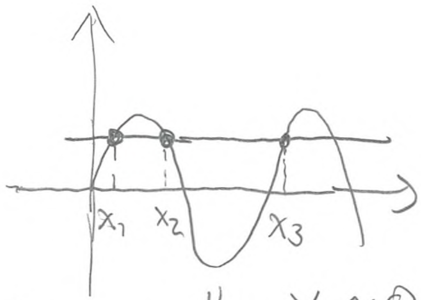
D4. Hitta *alla* lösningar till ekvationen. *Svara i **radianer**!*
$\sin(3x) = 0{,}72$ (2/0/0)

Kan lösas både grafiskt och algebraiskt

Grafiskt:

"$\sin(3x)$"

"$y = 0.72$" $\Rightarrow$



"Skärning" $\Rightarrow$ $x_1 \approx 0.268$

$x_2 \approx 0{,}779$

$x_3 \approx 2.362$

Perioden motsvarar

$x_3 - x_1 \approx 2{,}094$ $\left(= \frac{2\pi}{3}\right)$

Algebraiskt:

$3x_1 = \sin^{-1}(0.72) + n \cdot 2\pi$

$3x_1 \approx 0.804 + n \cdot 2\pi$

$x_1 \approx 0{,}268 + \frac{n \cdot 2\pi}{3}$

$3x_2 = \pi - \sin^{-1}(0{,}72) + n \cdot 2\pi$

$x_2 = \frac{\pi - 0{,}804 + n \cdot 2\pi}{3}$

Alla lösningar:

$x_1 \approx 0{,}268 + n \cdot 2{,}094$

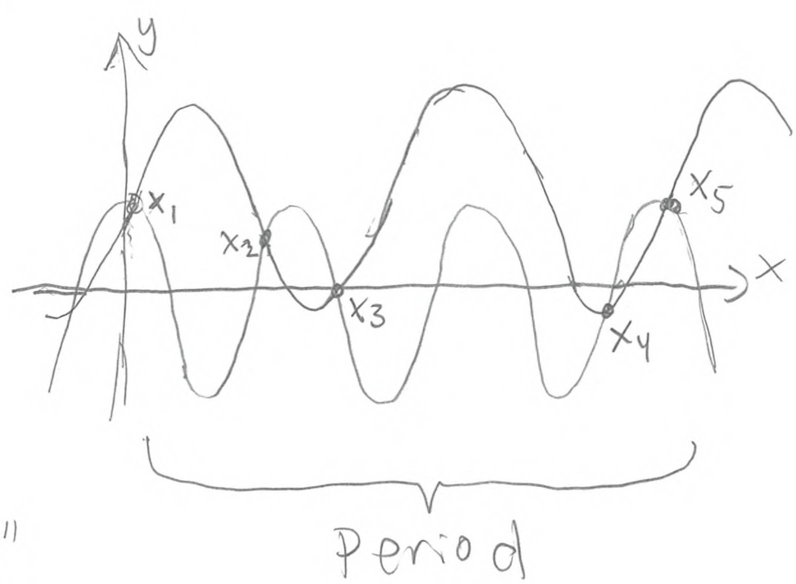
$x_2 \approx 0.779 + n \cdot 2{,}094$

D5. Ekvationen $\cos(3x) = \sin(2x) + 0{,}8$ där x anges i radianer har *periodiska* lösningar.
Bestäm dessa lösningar. (1/2/0)

Kan endast lösas grafiskt:

"$\cos(3x)$"

"$\sin(2x) + 0.8$" $\Rightarrow$



"Skärning(f, g, 0, 7)"

$x_1 \approx 0{,}0844$

$x_2 \approx 1.736$

$x_3 \approx 2.634$

$x_4 \approx 5.727$

$x_5 \approx 6.368$

Lösningar i en period

perioden ges av

$x_5 - x_1 \approx 6{,}283$ $(= 2\pi)$

Alla lösningar:

$x_1 \approx 0{,}084 + 6{,}28 \cdot n$

$x_2 \approx 1.74 + 6{,}28 \cdot n$

$x_3 \approx 2.63 + 6.28 \cdot n$

$x_4 \approx 6.37 + 6.28 \cdot n$

D6. Lös olikheten nedan. *Svara i* ***radianer*** (0/2/0)

$\cos(2x) + \sin(x) < 0{,}3x - 0{,}8$

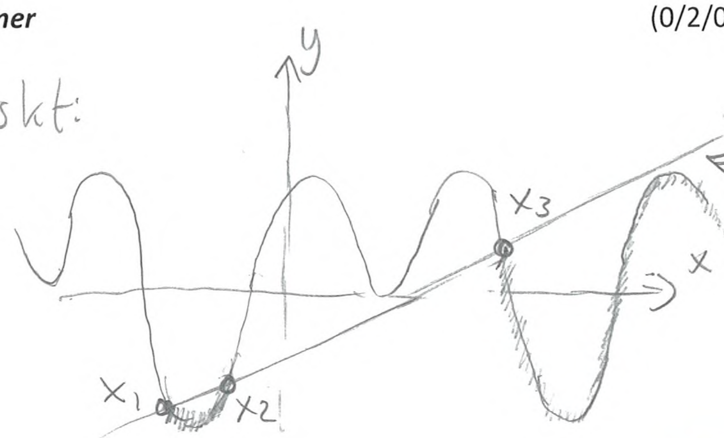
OBS! ingen skärning här

Kan bara lösas grafiskt:

"cos (2x) + sin (x)"

$\Rightarrow$

"0.3x − 0.8"



"Skärning" $\Rightarrow$ $x_1 \approx -2{,}07$

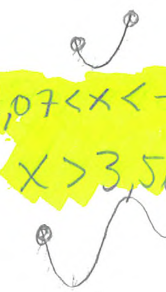
$x_2 \approx -0{,}93$

$x_3 \approx 3{,}56$

$\Rightarrow$ " < " Mindre än $\Rightarrow$ Trig. grafen nedan för linjen

$\Rightarrow$ $-2{,}07 < x < -0{,}93$

$x > 3{,}56$



D7. Uppgiften nedan är ifrån ett gammalt Mattiasprov. Lös uppgiften. (0/1/1)

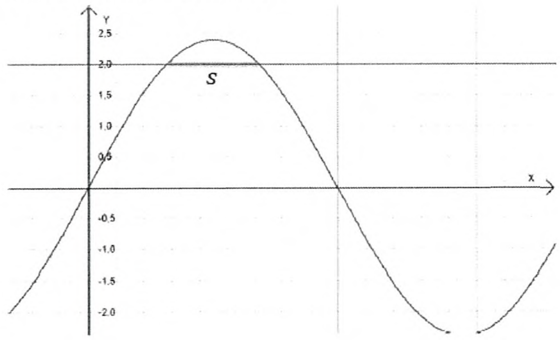
Figuren nedan visar graferna till funktionerna

$y_1 = A \cdot sin(2x)$ där x anges i radianer och linjen $y_2 = 2$.

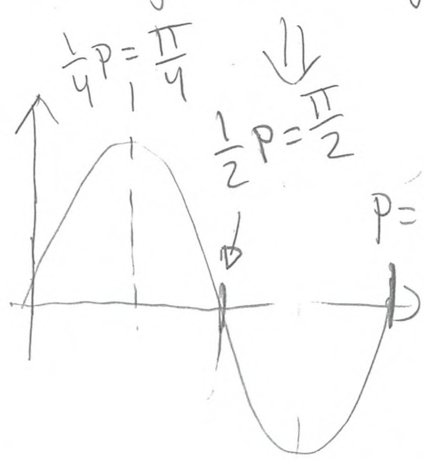
I figuren är även sträckan s markerad.

Beräkna värdet på A så att $s = 30\%$ av perioden till y_1

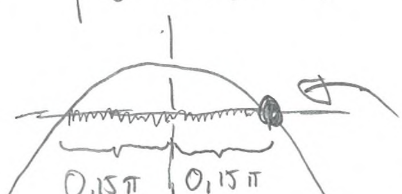
Svara med 3 decimaler.



sin (2x) har perioden $p = \frac{2\pi}{2} = \pi$ och är inte förskjuten i ngn riktning



s ska vara 30% av perioden $\Rightarrow$ $s = 0{,}3\pi$ $\Leftarrow$



$x = \frac{\pi}{4} = 0{,}25\pi$

Den högra punkten har koordinaterna

$(0.4\pi ; 2)$

$(0.25\pi + 0{,}15\pi)$

$\Rightarrow$ $y = A \cdot \sin(2x)$

$2 = A \cdot \sin(2 \cdot 0{,}4\pi)$

$\Rightarrow A = \frac{2}{\sin(0{,}8\pi)} \approx 3{,}403$