

# FACIT

## 2.6 Asymptoter

### Del 1 – Utan digitalt hjälpmedel

1. Bestäm den lodräta asymptoten till funktionen  $f(x) = \frac{4x+9}{2x-6}$  (1/0/0)

Lodräta asymp. fås där nämnaren = 0

$$\Rightarrow 2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$$

2. Funktionen  $f(x) = \frac{2x+6}{(x+2)(5x-4)}$  har två lodräta asymptoter.

Bestäm dessa bådas ekvationer. (2/0/0)

$$\text{Nämnaren} = 0 \Rightarrow (x+2)(5x-4) = 0$$

$$x_1 = -2$$

$$5x - 4 = 0$$

$$5x = 4$$

$$x_2 = \frac{4}{5}$$

3. Funktionen  $f(x) = \ln(x+2)$  har en asymptot. Ange dess ekvation. (1/0/0)

ln-funktioner har en lodrät asymptot

$$\text{där argumentet} = 0 \Rightarrow (x+2) = 0$$

$$x = -2$$

4. Funktionen  $f(x) = \frac{6x-5}{2x+2}$  har två asymptoter. Ange båda dessas ekvationer. (1/1/0)

$$\text{Lodrat} \Rightarrow \text{Nämnaren} = 0 \Rightarrow 2x + 2 = 0$$

$$x = -1$$

$$\text{Vågrät} \Rightarrow y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x}{2x} = \frac{6}{2} = 3 \Rightarrow y = 3$$

5. Bestäm alla asymptoter till funktionen  $y = \frac{3-x}{x^2-4} + \frac{1}{3}$

(2/1/0)

Lodräta  $\Rightarrow$  Nämnaren  $= 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = -2$

Vågräta  $\Rightarrow y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{x^2} + \frac{1}{3} = \lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{1}{x} + \frac{1}{3} = 0 + \frac{1}{3} \Rightarrow y = \frac{1}{3}$

6. Ange valfri funktion som har asymptoterna  $y = 4$  och  $x = -2$ .

(1/1/0)

$x = -2 \Rightarrow$  Nämnaren  $= (x+2)$

$y = 4 \Rightarrow$  "4 ggr fler  $x$  i täljaren"  $\Rightarrow 4x$

Ex:  $y = \frac{4x}{x+2}$

7. Nedan visas två koordinatsystem och två funktionsuttryck.

Skissa graferna genom att utgå från funktionernas asymptoter.

a)  $y = \frac{x+5}{x+2}$

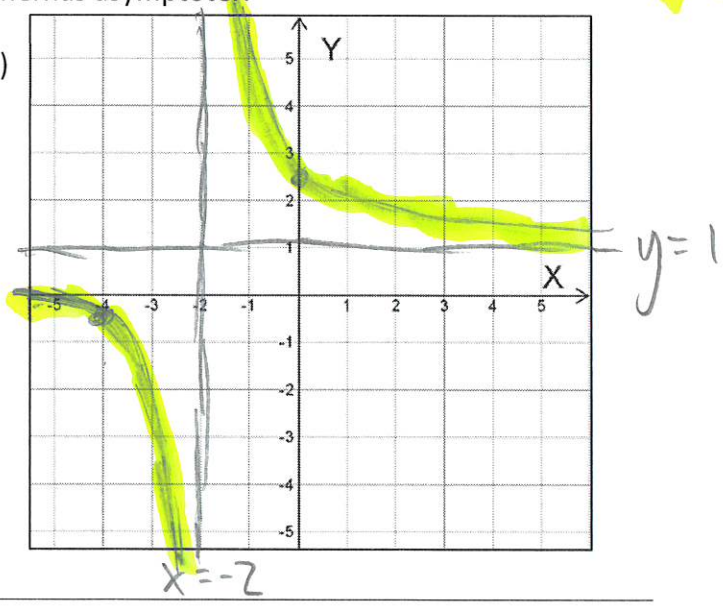
(1/2/0)

Lodrat:  $x+2=0 \Rightarrow x=-2$

Vågrät: " $\frac{x}{x}=1$ "  $\Rightarrow y=1$

En punkt: ex  $(0, \frac{5}{2})$

$\Rightarrow$  Ovanför asymp. på högersidan.



b)  $y = \frac{-1-2x}{x-3}$

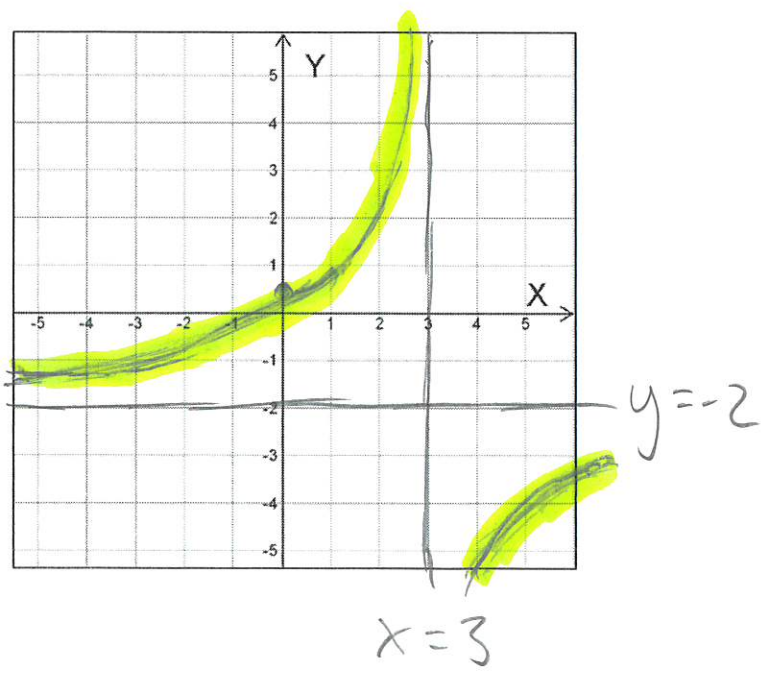
(1/2/0)

Lodrat:  $x-3=0 \Rightarrow x=3$

Vågrät: " $\frac{-2x}{x} = -2$ "  $\Rightarrow y = -2$

En punkt: ex  $(0, \frac{1}{3})$

$\Rightarrow$  Ovanför asymp på vänstersidan.



8. Uppgiften nedan är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften.

För funktionen  $f$  gäller att  $f(x) = \frac{x+1}{x-3}$

a) Ange asymptoterna till funktionen  $f$  Endast svar krävs (1/1/0)

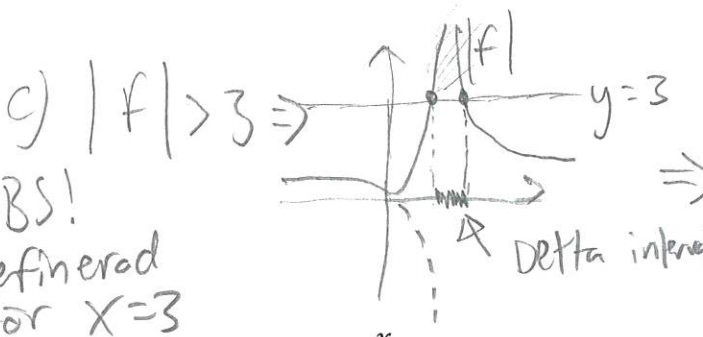
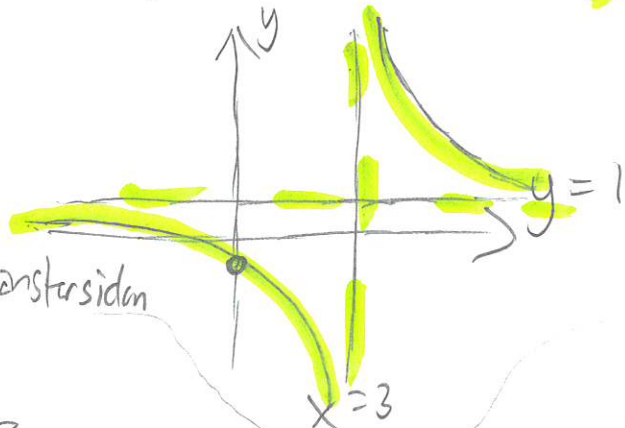
b) Skissa grafen till funktionen  $f$  och dess asymptoter. (0/2/0)

c) ~~Lös olikheten  $|f(x)| > 3$  där  $f(x) = \frac{x+1}{x-3}$  (0/0/2)~~

a) Lodrät:  $x-3=0 \Rightarrow x=3$       Vågrät: " $\frac{x}{x}=1$ "  $\Rightarrow y=1$

b) Rita ut asymp.  
och tänk en punkt  
ex  $(0, -\frac{1}{3})$

$\Rightarrow$  under asymp på vänstersidan



$f=3 \Rightarrow \frac{x+1}{x-3}=3 \Rightarrow x_1=5$   
 $f=-3 \Rightarrow \frac{x+1}{x-3}=-3 \Rightarrow x_2=2$   
 $\Rightarrow 2 < x < 5$   
 Dock ej  $x=3$

OBS!  
Odefinierad  
för  $x=3$

9. Funktionen  $f(x) = \frac{x}{\sin(x + \frac{\pi}{3})}$  där  $x$  anges i radianer har flera asymptoter.

Bestäm ekvationerna för **samtliga** dessa asymptoter.

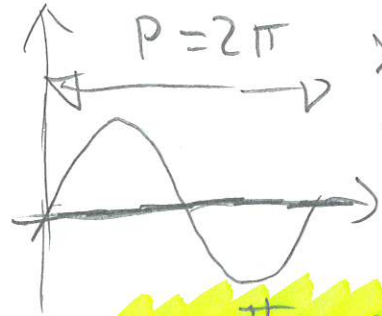
(0/3/0)

Vågräta: Saknas

Lodrät: Nämnen = 0  $\Rightarrow \sin(x + \frac{\pi}{3}) = 0$

Tänk  $\sin(x) = 0$  och förskjut svaren  $\frac{\pi}{3}$  åt vänster

En period:



$x_1 = 0$   
 $x_2 = \frac{P}{2} - x_1 = \pi$

Förskjut svaren!  
 $x = 0 - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}$   
 $x_2 = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

Alla:  $x = -\frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$   
 $x = \frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi$



10. Mattias påstår att:

"Om en funktion har en nämnare som kan bli noll för något värde på  $x$  kommer funktionen alltid ha en vertikal asymptot för det  $x$ -värdet"

Mattias har dock fel. Det finns flera funktioner då inte vertikala asymptoter uppstår trots att nämnaren är noll. Ge ett exempel på en sådan funktion.

(0/1/0)

Om funktionernas nämnare finns som en faktor i täljaren kan den förkortas och ingen asymptot finns,

ex:  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = x+2$  el.  $f(x) = \frac{x-1}{x-1}$

11. Hitta de värden på konstanten  $a$  som gör att funktionerna nedan saknar vertikala asymptoter.

a)  $f(x) = \frac{2x^3 - 18x}{x + a}$  ← Faktorisera

(0/2/0)

$2x^3 - 18x = \left[ \begin{array}{l} \text{Bryt ut} \\ 2x \end{array} \right] = 2x(x^2 - 9) = \left[ \begin{array}{l} \text{konj.} \\ \text{regeln} \end{array} \right] =$   
 $= 2x(x-3)(x+3)$  Om nämnaren är ngn av dessa saknas vertikala asymp.  
 $\Rightarrow a_1 = 0 \quad a_2 = -3 \quad a_3 = 3$

b)  $f(x) = \frac{(x^2 + 4)(x^2 - 4x - 5)}{x + a}$

(0/1/1)

$x^2 + 4$  kan inte faktoriseras

$x^2 - 4x - 5$  ← Faktorisera mha pq:

$x = 2 \pm \sqrt{4+5} = 2 \pm \sqrt{9} = 2 \pm 3 \rightarrow x_1 = 5$   
 $\rightarrow x_2 = -1$

$\Rightarrow$  Faktorerna  $(x-5)(x+1)$

$\Rightarrow a_1 = -5$   
 $a_2 = 1$

10. Nedan visas tre koordinatsystem och två funktionsuttryck.  
Skissa graferna genom att utgå från funktionernas asymptoter.

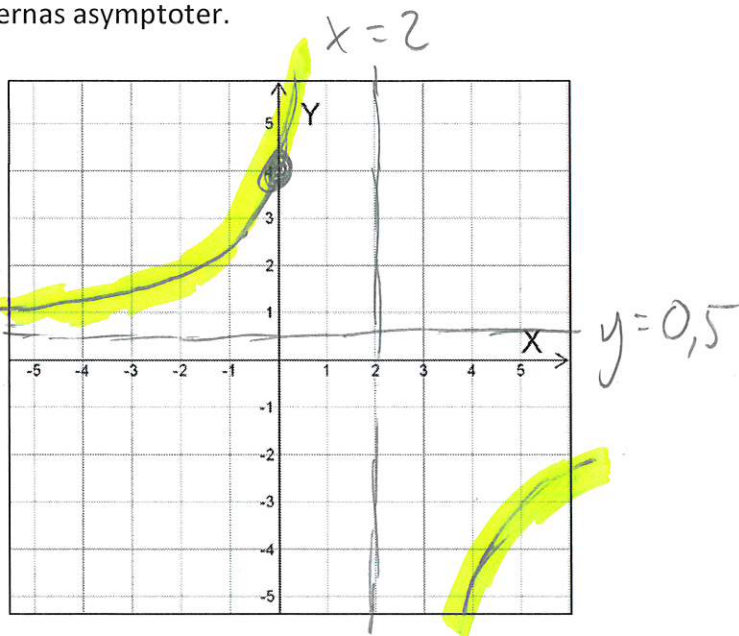
a)  $y = \frac{x+5}{2-x} + \frac{3}{2}$  (1/2/0)

Lodrät:  $2-x=0 \Rightarrow x=2$

Vägrät: " $\frac{x}{-x} + \frac{3}{2} = -1 + \frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}$ "

En punkt: ex (0, 4)

$\Rightarrow$  Ovanför asympt. till vänster



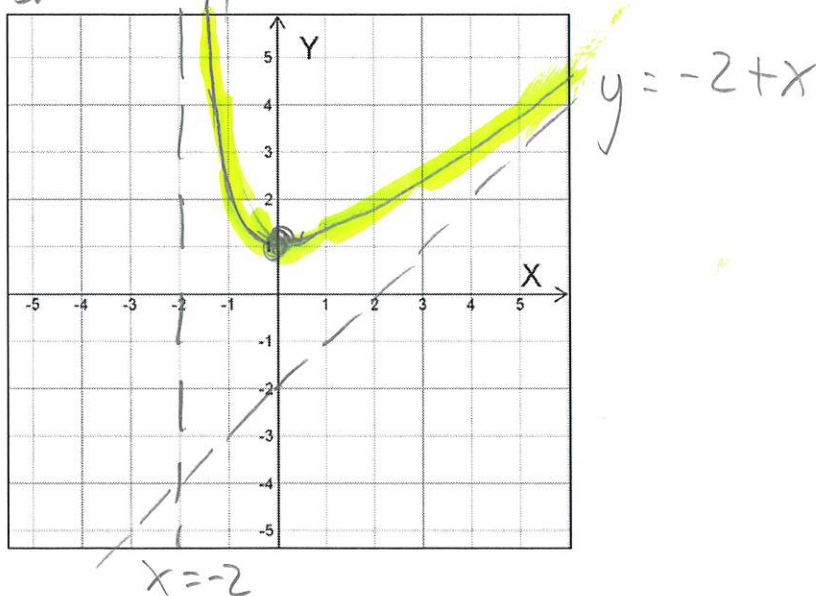
b)  $y = \frac{2-2x}{x+2} + x$  (0/2/1) OBS!  $\Rightarrow$  Sned

Lodrät:  $x+2=0 \Rightarrow x=-2$

Sned: " $\frac{-2x}{x} + x \Rightarrow y = -2+x$ "

En punkt: ex: (0, 1)

$\Rightarrow$  Mellan på översidan



c)  $y = \frac{1}{x^2-4} + 2$  (0/1/1)

Lodräta:  $x^2-4=0$

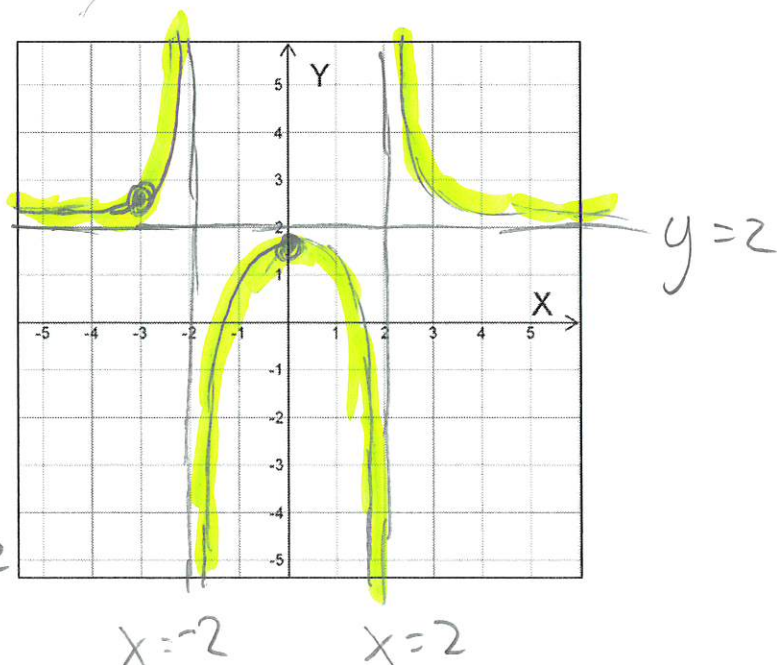
$x_1=2$

$x_2=-2$

Vägrät: " $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2-4} + 2 =$ "

$0+2 \Rightarrow y=2$

Två punkter: ex (0; 1,75)  
ex: (-3; 2,2)



13

11. Funktionen  $f(x) = \frac{2x^2 - 4x + 32}{x + 2}$  har en sned asymptot.

Bestäm dess ekvation.

(0/0/2)

Om täljaren har högre grad än nämnaren,  
Skriv om funk., till exempel mha

polynomdivision:

$$\begin{array}{r} 2x - 8 \\ \hline 2x^2 - 4x + 32 \\ -(2x^2 + 4x) \\ \hline 0 - 8x + 32 \\ -(-8x - 16) \\ \hline 0 + 48 \end{array} \quad \boxed{x+2}$$

$$\Rightarrow \frac{2x^2 - 4x + 32}{x + 2} = 2x - 8 + \frac{48}{x + 2}$$

eller "konstanttrix":

$$\frac{2x^2 - 4x + 32}{x + 2} = \frac{2x^2 + 4x - 8x - 16 + 48}{x + 2}$$

$$= \frac{2x^2 + 4x}{x + 2} - \frac{8x + 16}{x + 2} + \frac{48}{x + 2}$$

$$= \frac{2x(x+2)}{(x+2)} - \frac{8(x+2)}{(x+2)} + \frac{48}{x+2}$$

$$\begin{aligned} \text{Sned asympt.} &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} 2x - 8 + \frac{48}{x + 2} \\ &= 2x - 8 + 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y = 2x - 8$$