FACIT

2.6 Tangens och ”gömda” trigonometriska ekvationer

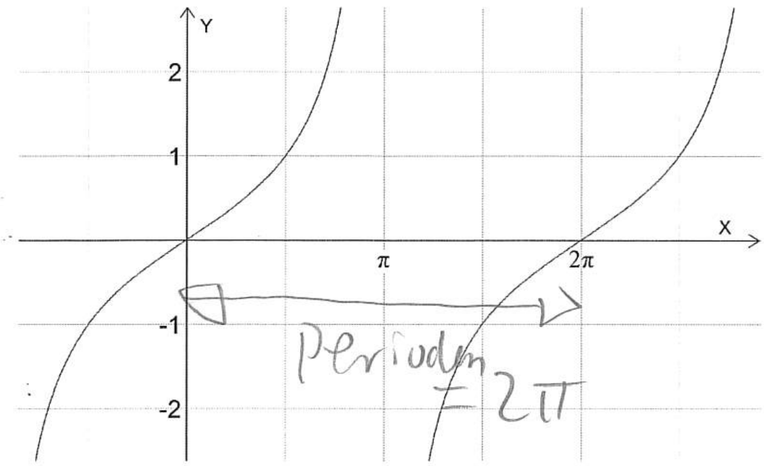
Del 1 – Utan digitalt hjälpmedel

1. Bestäm *perioden* till funktionen $f(x) = \tan(6x)$. (1/0/0)
   Svara i **grader**

perioden till $\tan(x) = 180^\circ$

$\Rightarrow$ $\tan(6x)$ har perioden $\frac{180}{6} = 30^\circ$

2. Figuren visar grafen till funktionen $f(x) = tan(kx)$ där x anges i radianer.
   Bestäm värdet av konstanten k med hjälp av figuren. (1/0/0)



$\tan(x)$ har perioden $180^\circ = \pi$

Figuren har perioden 2π

$\Rightarrow k = \frac{\pi}{2\pi} = 0{,}5$

3. Bestäm alla lösningar till ekvationen $\tan(3x) = \sqrt{3}$. (2/0/0)
   Svara i **grader**

$p = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$

Tangens har bara en lösning per period:

$3x = [FB] = 60^\circ$

$x = 20^\circ$

Alla lösningar: $x = 20^\circ + 60^\circ \cdot n$

4. Trigge och Ekvia har fått i uppgift att lösa ekvationen

$sin(x) + cos(x) = 0$ där x anges i **grader**

Deras lösningar syns nedan:

Trigges lösning	Ekvias lösning
$\sin(x) + \cos(x) = 0$ $\frac{\sin(x)}{\cos(x)} + \frac{\cos(x)}{\cos(x)} = \frac{0}{\cos(x)}$ $\tan(x) + 1 = 0$	$\sin(x) + \cos(x) = 0$ Formelblad: $a\sin(x) + b\cos(x) = c\sin(x+v)$ $c = \sqrt{a^2+b^2}$ $v = \tan^{-1}\frac{b}{a}$ Här: $a = 1$, $b = 1$ $c = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ $v = \tan^{-1} 1 = 45°$ $\sqrt{2} \cdot \sin(x + 45°) = 0$

Ingen av lösningarna är slutförda. Slutför bådas lösningar och visa att båda ger samma svar. (2/1/0)

Trigge: $\tan(x) + 1 = 0$

$\tan(x) = -1$

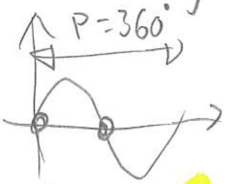
$x = [FB] = 135°$

Alla: $x = 135° + n \cdot 180°$

$x = \ldots -45°, 135°, 315°, 495°, \ldots$

Ekvia: $\sqrt{2}\sin(x + 45°) = 0$

Lös $\sin(x) = 0$ och förskjut lösningarna 45° åt vänster



$x_1 = 0° \Rightarrow -45°$

$x_2 = 180° \Rightarrow 135°$

Alla: $x = -45° + n \cdot 360°$

$x = 135° + n \cdot 360°$

5. Hitta alla lösningar till ekvationen, om x anges i **grader**

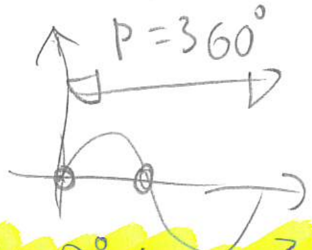
$2\sin(x) \cdot \cos(x) = \sin(x)$ (1/2/0)

Skriv om så allt står på samma sida:

$2\sin(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) = 0$ [Bryt ut sin x]

$\sin(x)(2\cos(x) - 1) = 0$

$\sin(x) = 0$

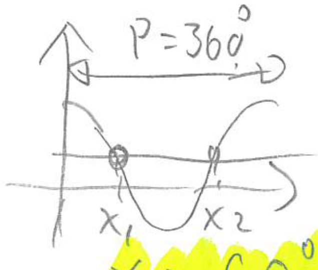


$x = 0° + n \cdot 360°$

$x = 180° + n \cdot 360°$

$2\cos(x) - 1 = 0$

$\cos(x) = \frac{1}{2}$



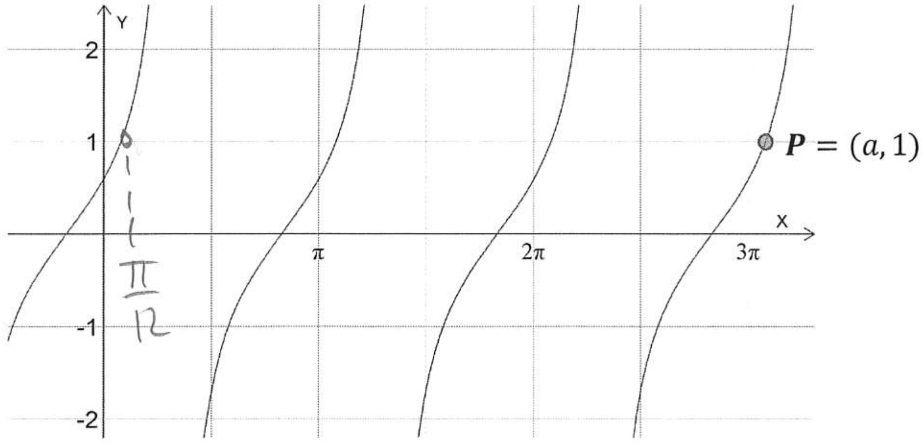
$x_1 = [FB] = 60°$

$x_2 = P - x_1 = 300°$

$x = 60° + n \cdot 360°$

$x = 300° + n \cdot 360°$

6. Figuren visar grafen till funktionen $f(x) = \tan\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ där x anges i radianer, och en punkt på grafen, $\boldsymbol{P}$.



Bestäm x-koordinaten, a, för punkten $\boldsymbol{P}$ (1/2/0)

Svara exakt!

Lös ekv. $\tan(x) = 1$ och förskjut lösningarna $\frac{\pi}{6}$ åt vänster. $p = \pi$ $x = [FB] = \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow$ Efter förskjutning: $\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{6\pi}{24} - \frac{4\pi}{24} = \frac{\pi}{12}$

P ligger 3 perioder fram $\Rightarrow a = \frac{\pi}{12} + 3\pi = \frac{\pi}{12} + 3\,\frac{12\pi}{12} = \frac{37\pi}{12}$

7. Bestäm alla lösningar till ekvationen $\sin(5x) = -\frac{\cos(5x)}{\sqrt{3}}$ (0/3/0)

Svara i **radianer**

Dela på $\cos(5x) \Rightarrow$ $\frac{\sin(5x)}{\cos(5x)} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\left[\frac{\sin 5x}{\cos 5x} = \tan 5x\right]$ $\tan(5x) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$p = \frac{\pi}{5}$

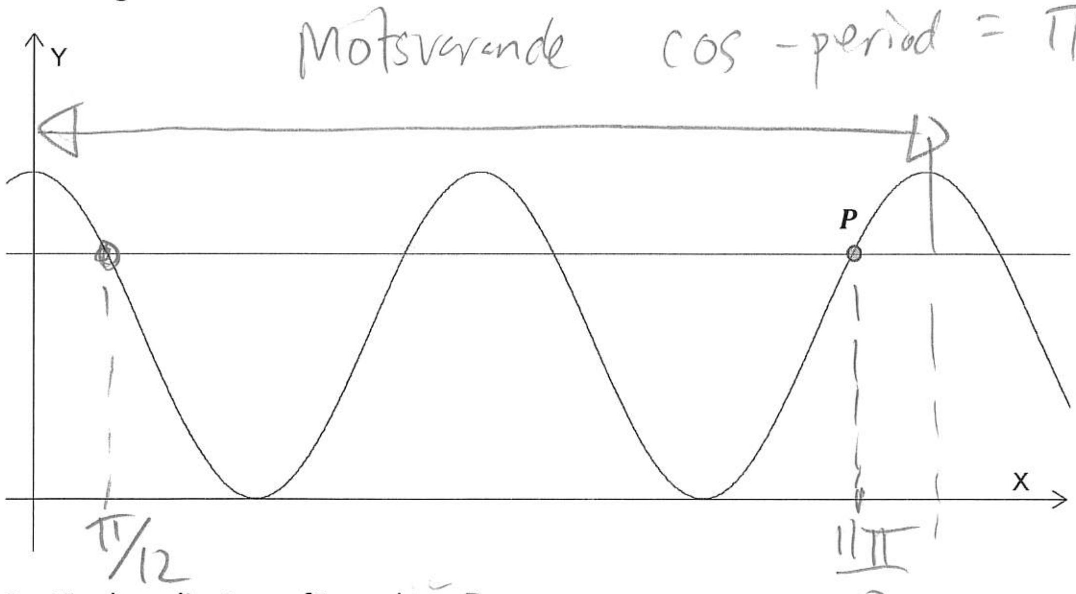
$5x_1 = [FB] = \frac{5\pi}{6}$

$x_1 = \frac{\pi}{6}$

Alla lösningar: $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{5} \cdot n$

8. Figuren nedan visar graferna till funktionerna
$f(x) = \cos(2x) \cdot \cos(2x)$ och $g(x) = \frac{3}{4}$
där x anges i radianer.

Motsvarande cos-period $= \pi$

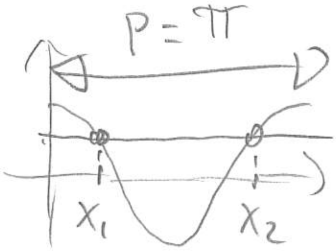


Bestäm koordinaterna för punkten ***P*** (0/1/1)

Lös ekv: $\cos(2x) \cdot \cos(2x) = \frac{3}{4} \Rightarrow$

$(\cos(2x))^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos(2x) = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$



$2x_1 = [FB] = \frac{\pi}{6}$

$x_1 = \frac{\pi}{12}$ $x_2 = \frac{11\pi}{12}$

$P = \left(\frac{11\pi}{12}, \frac{3}{4}\right)$

9. Bestäm alla **asymptoter** till funktionen $y = \tan\left(2\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right)$
där x anges i ***radianer***. (0/1/1)

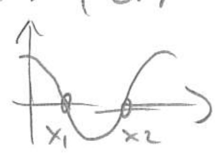
$\tan\left(2\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{\sin\left(2\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right)}{\cos\left(2\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right)}$

Vågräta: saknas

Lodräta: $\cos\left(2\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right) = 0$

Lös $\cos(2x) = 0$
och förskjut svaren
$\frac{\pi}{3}$ åt höger

$\cos(2x) = 0$ $2x_1 = [FB] = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{4}$



$x_2 = P - x_1 = \frac{3\pi}{4}$

Förskjuts dessa fås:

$x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}$: $x = \frac{7\pi}{12} + n \cdot \pi$

$x_2 = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{3}$: $x = \frac{13\pi}{12} + n \cdot \pi$

10. Funktionen $f(x) = 2x^3 - x^2 - 2x + 1$ har ett nollställe vid $x = 0{,}5$

Hitta alla lösningar till ekvationen $2(\sin(x))^3 - (\sin(x))^2 - 2\sin(x) + 1 = 0$
där x anges i **grader** (0/0/3)

$2(\sin(x))^3 - (\sin(x))^2 - 2\sin(x) + 1$ är besläktad med $2x^3 - x^2 - 2x + 1$ på så vis att "x" bytts ut mot sin (x).

Det innebär att lösningarna till ekv. $f(x) = 0$ kan bytas till "$\sin(x) = \ldots$"

En lösning $x = 0{,}5 \Rightarrow (x - 0{,}5)$ en faktor

$$\begin{array}{l|l} \quad 2x^2 - 2 & \\ \hline 2x^3 - x^2 - 2x + 1 & x - 0{,}5 \\ 2x^3 - x^2 & \\ \hline 0 \quad 0 \; -2x + 1 & \\ \qquad\quad -2x + 1 & \\ \hline \qquad\quad\; 0 \quad 0 & \end{array}$$

$\Rightarrow 2x^2 - 2 = 0$

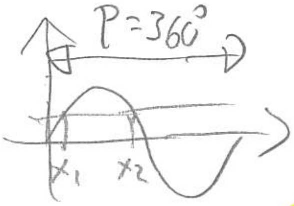
$x^2 = 1$

$x = 1$

$x = -1$

3 lösningar till $f(x)$: $x = 0{,}5$ $x = -1$ $x = 1$

$\Rightarrow \sin(x) = 0{,}5$

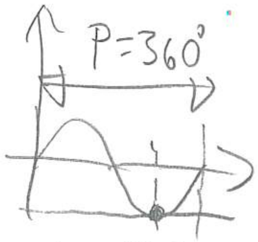


$x_1 = [FB] = 30°$

$x_2 = 180° - 30° = 150°$

Alla: $x = 30° + n \cdot 360°$

$\sin(x) = -1$

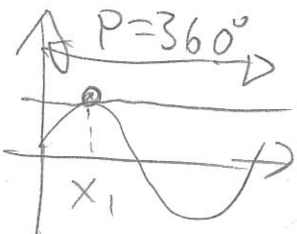


$x = 3/4 \cdot P =$

$3/4 \cdot 360° = 270°$

Alla: $x = 270° + n \cdot 360°$

$\sin(x) = 1$



$x_1 = [FB] = 90°$

Alla: $x = 90° + n \cdot 360°$