FACIT

”Repetitionsprov” inför provet - grafer, absolutbelopp, asymptoter samt trigonometriska funktioner och ekvationer

Del B – Utan miniräknare – Endast svar

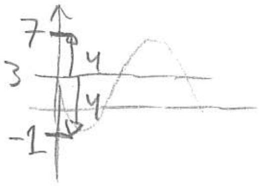
1. Bestäm de lodräta asymptoterna till funktionen $f(x) = \dfrac{4x+6}{x^2-9}$

"Nämnaren = 0"

$x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9}$

Svar: $x_1 = 3 \quad x_2 = -3$ (1/0/0)

2. Bestäm största och minsta värdet av funktionen $f(x) = 3 - 4\sin(3x)$



Svar: Största = 7

Minsta = −1 (1/0/0)

3. Bestäm minsta värdet av uttrycket $|2x - 4| - 3$

| | blir som minst noll $\Rightarrow$

$0 - 3 = -3$

Svar: −3 (1/0/0)

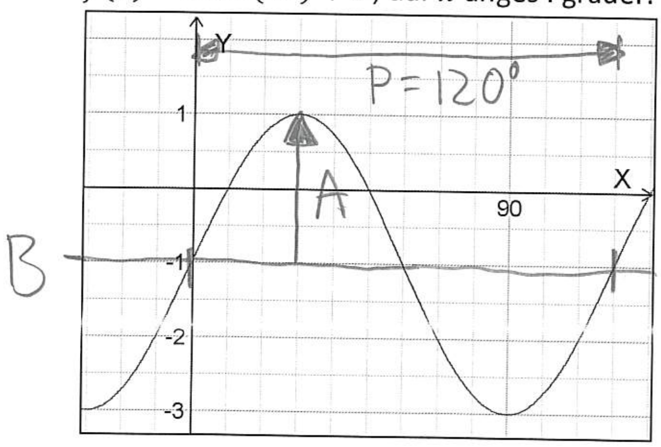
4. Bestäm alla lösningar till ekvationen $\sin(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i intervallet $0° < x < 270°$

$2x_1 = 60° \Rightarrow x_1 = 30°$ $\quad P = 180°$

$x_2 = \frac{P}{2} - x_1 = 90° - 30° = 60°$

Svar: 30°, 60°, 210°, 240° (2/0/0)

5. Nedan visas grafen till en trigonometrisk funktion som kan skrivas på formen $f(x) = A\sin(kx) + B$, där x anges i grader.



Bestäm värdet på konstanterna A, k och B.

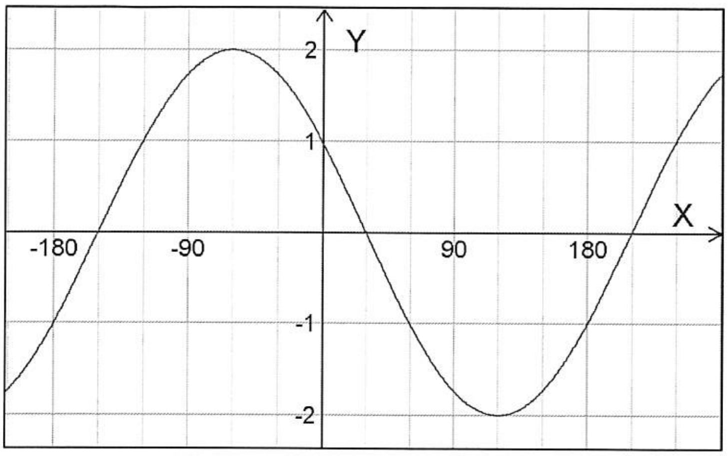
$k = \frac{360°}{P} = \frac{360°}{120°} = 3$

Svar: A = 2

k = 3

B = −1 (2/1/0)

6. Nedan visas grafen till en trigonometrisk funktion.



Två av alternativen nedan svarar mot den ritade kurvan. Vilka?

~~A~~ $f(x) = 2\sin(x - 30°)$ | **B** $f(x) = 2\cos(x + 60°)$

~~C~~ $f(x) = -2\sin(x + 30°)$ | ~~D~~ $f(x) = -\sin(x - 30°)$

E $f(x) = -2\sin(x - 30°)$ | ~~F~~ $f(x) = -2\cos(x + 120°)$

Svar: B, E (2/0/0)

7. Bestäm båda asymptoterna till funktionen $f(x) = \frac{-3x+2}{8+4x} + \frac{1}{4}$

"x" $8+4x=0 \Rightarrow x=-2$

"y" $-\frac{3}{4}+\frac{1}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$

Svar: $x =$ -2

$y =$ $-0{,}5$ (1/1/0)

8. Bestäm alla lösningar till ekvationen $\cos(3x) = \frac{1}{2}$ i intervallet $180° < x < 360°$

$3x_1 = 60° \Rightarrow x_1 = 20°$

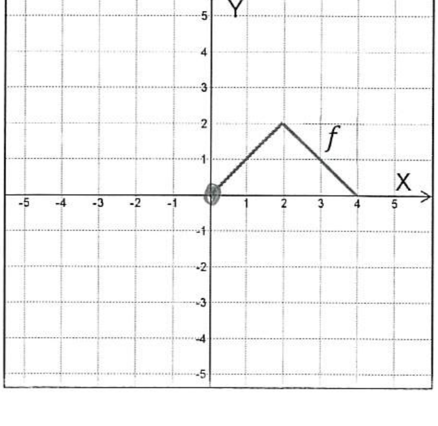
$P = 120°$

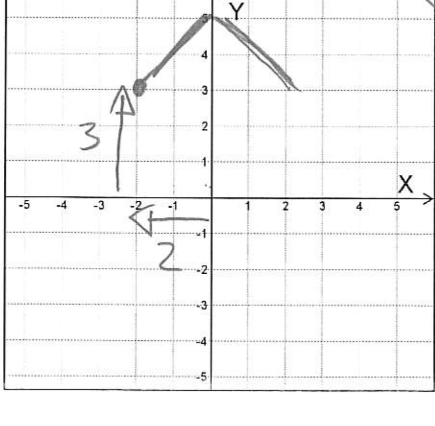
$x_2 = P - x_1 = 100°$

Svar: $220°, 260°, 340°$ (1/1/0)

$\ldots 20°, 100°, 140°, 220°, 260°, 340°, \ldots$

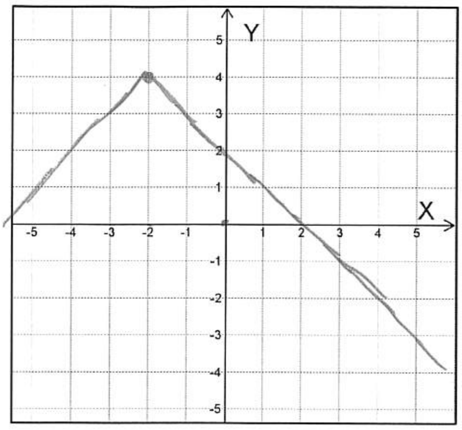
9. I det vänstra koordinatsystemet visas grafen till funktionen $y = f(x)$.
Rita i det högra koordinatsystemet grafen till funktionen $y = f(x+2) + 3$ (0/1/0)





3 steg upp
2 steg åt vänster

10. Rita i koordinatsystemet nedan grafen till $4 - |x + 2|$ (0/2/0)



4 steg upp

2 steg åt vänster

upp-och-ned

11. Nedan visas fem funktionsuttryck märkta A - E.
För vilket av alternativen gäller att $f(x) = |f(x)|$?

"Vilken graf är alltid över x-axeln?"

~~A~~ $f(x) = 4x - 2$

~~B~~ $f(x) = 2\sin(x)$

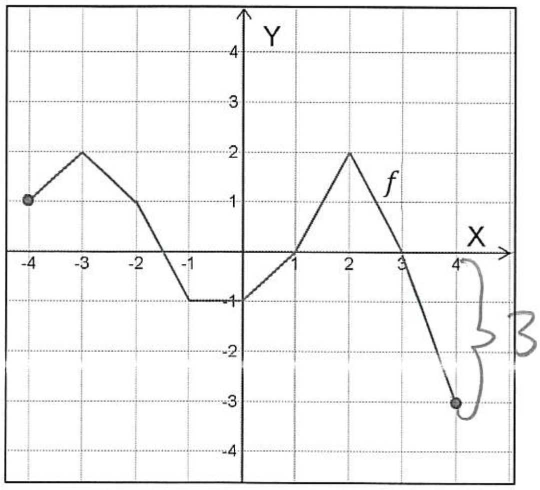
~~C~~ $f(x) = 3\cos(x) + 2$

D $f(x) = 1 - \cos(x)$

~~E~~ $f(x) = \sin(2x) - 1$

Svar: D (0/1/0)

12. Figuren nedan visar grafen till funktionen f i intervallet $-4 \leq x \leq 4$
Bestäm största och minsta värdet av $|f|$ i det aktuella intervallet



Frågan gäller den absolutbeloppade versionen, dvs

Svar: Största = 3

Minsta = 0 (0/1/0)

13. Figuren nedan visar graferna till de två funktionerna $f(x) = \tan(3x)$ och $g(x) = \sqrt{3}$ där $\boldsymbol{x}$ **anges i radianer**

$\tan(3x) = \sqrt{3}$

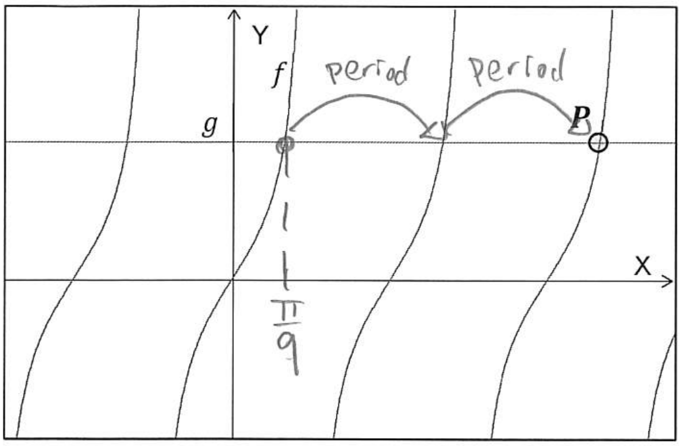
$3x = \frac{\pi}{3}$

$x = \frac{\pi}{9}$

$\text{Period} = \frac{\pi}{3}$

$P = \frac{\pi}{9} + 2 \cdot \text{Period} =$

$= \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{9} + \frac{6\pi}{9}$



Bestäm exakt x-koordinaten för punkten $\boldsymbol{P}$

Svar: $\frac{7\pi}{9}$ (0/0/1)

14. Figuren visar en trigonometrisk funktion som kan skrivas på formen $y = cos(kx + v) + 1$, där x anges i grader.

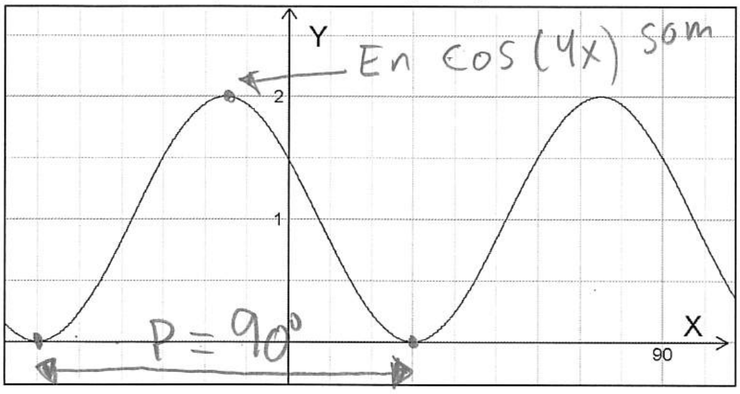
flyttats 15° åt vänster

$\boxed{P = 90° \Rightarrow k = 4}$

$\cos(4(x + 15°)) =$

$= \cos(4x + 60°)$

$v = 60°$

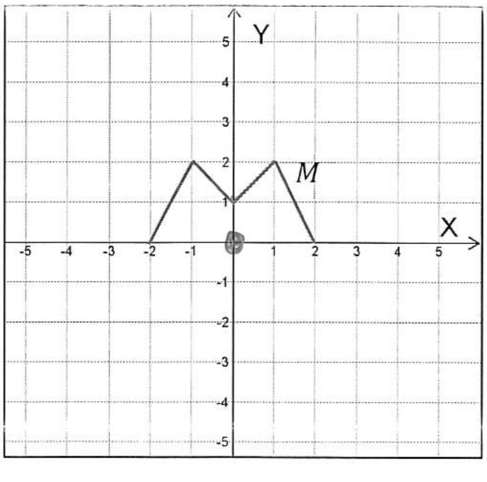


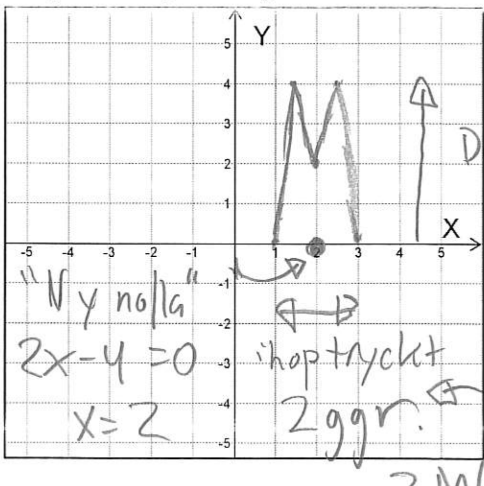
Bestäm värdet på konstanterna k och v.

Svar: $k =$ 4

$v =$ 60° (0/1/1)

15. I det vänstra koordinatsystemet nedan visas grafen till $y = M(x)$.
Rita i koordinatsystemet till höger grafen till $y = 2M(2x - 4)$ (0/1/2)





Dubbel amp. $\boxed{2}M(\ )$

$2M(\boxed{2}x \ldots)$

Del C – Utan miniräknare – Motiveringar/Uträkningar krävs

16. Bestäm alla lösningar till ekvationen $\cos(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, om x anges i grader (2/0/0)

$x_1 = 45^\circ$ $P = 360^\circ$

$x_2 = P - x_1 = 315^\circ$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 45^\circ + n \cdot 360^\circ \\ x &= 315^\circ + n \cdot 360^\circ \end{aligned}}$$

17. Ingrid ska lösa ekvationen $\cos(x) = 1$ från matteboken.

Hon tar då fram formelbladet och hittar då de båda lösningsraderna:
$x = 90^\circ + n \cdot 360^\circ$
$x = 270^\circ + n \cdot 360^\circ$

I facit står det att rätt svar är $x = 90^\circ + n \cdot 180^\circ$.

Ingrid undrar om hon har gjort fel.
Hjälp Ingrid genom att visa att båda skrivsätten motsvarar samma lösningar (2/0/0)

Ingrids lösning motsvarar:

$n=0 \begin{cases} 90^\circ \\ 270^\circ \end{cases}$

$n=1 \begin{cases} 450^\circ \\ 630^\circ \end{cases}$ $+360^\circ$

osv

nästa period fås som föregående $+360^\circ$

Facits skrivsätt motsvarar:

$n=0$: 90°
$n=1$: 270° $+180^\circ$
$n=2$: 450° $+180^\circ$
$n=3$: 630° $+180^\circ$

osv

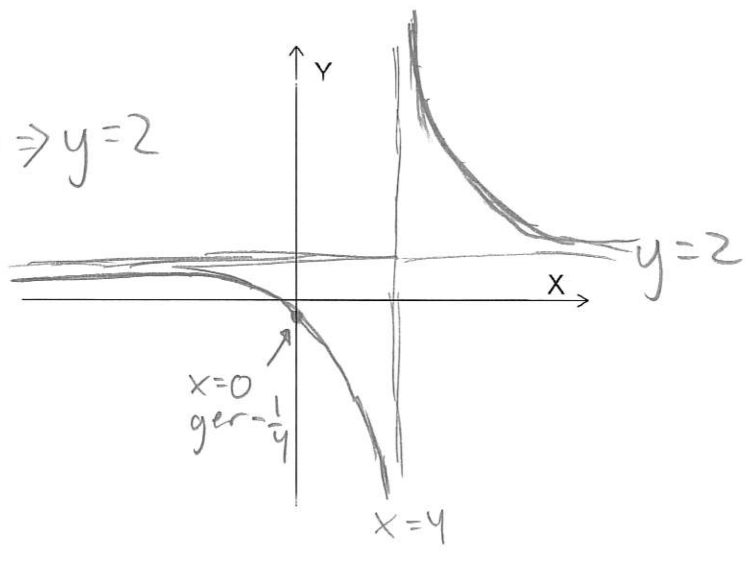
dvs nästa lösning fås som föregående $+180^\circ$

18. Skissa med hjälp av asymptoter grafen till funktionen $\frac{2x+1}{x-4}$ (2/2/0)
Motivera din skiss

Lodrät asymptot: $x - 4 = 0$
$x = 4$

Vågrät asymptot: $\frac{2x + 1}{x - 4} \Rightarrow y = 2$

Testar en punkt:
$x = 0 \Rightarrow -\frac{1}{4}$



19. Kenneth och Knut diskuterar funktionen $3\,sin(x) + 4cos(x)$.

Knut säger att funktionens största värde är 7.

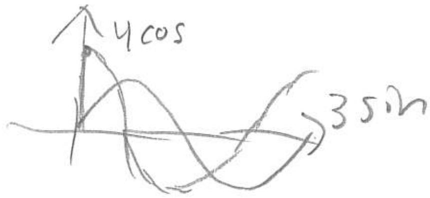
Kenneth säger i stället att dess största värde är 5.

a) Visa med hjälp av formelbladet att Kenneth har rätt (2/0/0)

b) Förklara hur Knut kan ha resonerat, och förklara varför detta sätt att tänka blir fel. (1/1/0)

a) $3\sin(x)+4\cos(x) = \begin{bmatrix} C=\sqrt{3^2+4^2} \\ =5 \end{bmatrix} = 5\sin(\quad) \Rightarrow$ Största värdet 5

b) Knut har lagt ihop de största värdena hos sin och cos vilket inte funkar eftersom de här inte inträffar samtidigt:



20. Lös ekvationen $|f(x)| = 1$ om $f(x) = \frac{5x-9}{x-1}$ (0/2/0)

$|f(x)|=1$ om $f(x)=1$ eller $f(x)=-1$

$\frac{5x-9}{x-1}=1$

$5x-9=x-1$

$4x=8$

$x=2$

$\frac{5x-9}{x-1}=-1$

$5x-9=1-x$

$6x=10$

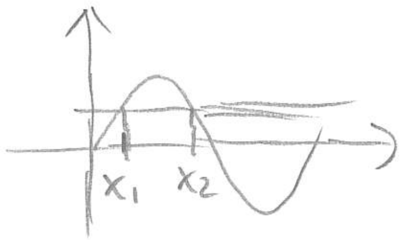
$x=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}$

$\boxed{\begin{array}{l} x=2 \\ x=\frac{5}{3} \end{array}}$

21. Hitta alla lösningar till olikheten $\sin(6x) > \frac{1}{2}$ om x anges i grader (0/2/1)

$6x_1=30^\circ \Rightarrow x_1=5^\circ$ $\quad P=60^\circ$

$x_2=\frac{P}{2}-x_1=25^\circ$



"$>\frac{1}{2}$" $\Rightarrow$ x-värdena MELLAN x_1 och x_2, dvs $5^\circ < x < 25^\circ$

Detta upprepas varje period:

$\boxed{5^\circ+n\cdot60^\circ < x < 25^\circ+n\cdot60^\circ}$

22. Ange en egen funktion som har de tre asymptoterna
$x = 3$ och $x = -2$ och $y = \frac{4}{3}$ (0/2/0)

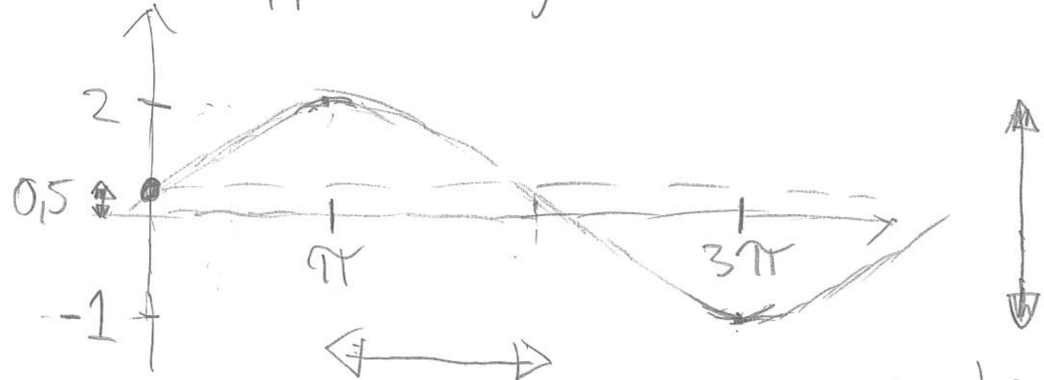
$x = 3$
$x = -2$ $\Rightarrow$ Nämnaren $(x-3)(x+2)$

För att då få $y = \frac{4}{3}$ är lättast att skriva: $\frac{1}{(x-3)(x+2)} + \frac{4}{3}$, men det finns andra exempel.

23. För en trigonometrisk funktion, $f(x)$, där x anges i radianer, gäller att den har ett maxvärde vid $(\pi, 2)$ och ett närliggande minvärde vid $(3\pi, -1)$.

Lös ekvationen $f(x) = \frac{5}{4}$ ~~(0/3/1)~~ (0/2/2)

Rita upp den givna informationen:



$2A = 3 \Rightarrow A = \frac{3}{2}$

$\frac{P}{4} = \pi \Rightarrow P = 4\pi \Rightarrow k = 0,5$

$f(x) = 1,5 \cdot \sin(0,5x) + 0,5$

$f(x) = \frac{5}{4} \Rightarrow 1,5 \sin(0,5x) + 0,5 = 1,25$

$1,5 \sin(0,5x) = 0,75$

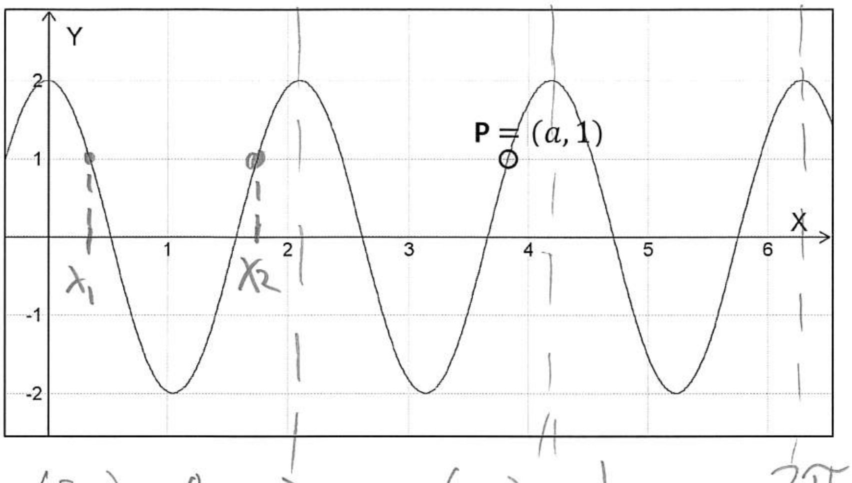
$\sin(0,5x) = 0,5$

$0,5x_1 = \frac{\pi}{6} \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{3}$

$x_2 = \frac{P}{2} - x_1 = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$

$\boxed{x = \frac{\pi}{3} + n \cdot 4\pi \quad x = \frac{5\pi}{3} + n \cdot 4\pi}$

24. Grafen nedan visar en funktion på formen $y = A \cdot cos(kx)$ där $\boldsymbol{A}$ och $\boldsymbol{k}$ är **heltal** och där x anges i radianer.
Bestäm exakt x-koordinaten, a, hos punkten **P** (0/2/1)



$K = 3$

(3 perioder på 2π)

$A = 2$

$2\cos(3x) = 1 \Rightarrow \cos(3x) = \frac{1}{2}$

$3x_1 = \frac{\pi}{3} \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{9}$

$x_2 = P - x_1 = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{9} = \frac{5\pi}{9}$

Punkten P:s X:

$\boxed{a = x_2 + P = \frac{5\pi}{9} + \frac{2\pi}{3} = \frac{11\pi}{9}}$

25. Bestäm alla lösningar till ekvationen
$2\cos(3x)\tan(2x) = \tan(2x)$, om x anges i grader (0/1/2)

En typisk "gömd" trig. ekvation.

$2\cos(3x) \cdot \tan(2x) - \tan(2x) = 0$ (HL = 0)

$\tan(2x)(2\cos(3x) - 1) = 0$

(Bryt ut $\tan(2x)$)

(Nollprod. metoden)

$\tan(2x) = 0$

$P = 90^\circ$

$2x_1 = 0^\circ$

$x = 0^\circ$

$\boxed{x = 0^\circ + 90^\circ \cdot n}$

$\cos(3x) = \frac{1}{2}$

$P = 120^\circ$

$3 \cdot x_1 = 60^\circ$

$x_1 = 20^\circ$

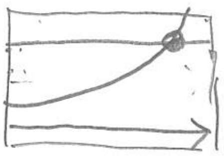
$x_2 = P - x_1 = 100^\circ$

$\boxed{\begin{aligned} x &= 20^\circ + 120^\circ \cdot n \\ x &= 100^\circ + 120^\circ \cdot n \end{aligned}}$

Del D – Med miniräknare – Motiveringar/Uträkningar krävs

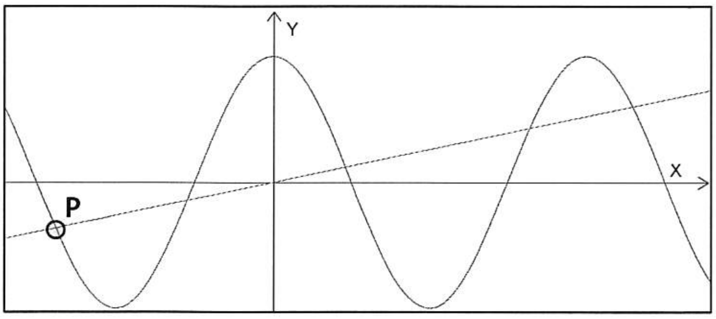
26. Ekvationen $\tan(x) + x = 5$ har en lösning mellan $0,5 < x < 1,5$ där x anges i radianer.

Ange lösningen med 3 decimalers noggrannhet. (1/0/0)
Endast svar krävs!



$\Rightarrow$ intersect:
$x = 1,306$

27. Figuren nedan visar graferna till $f(x) = 3\cos(x)$ och $g(x) = 0,25x$
Bestäm koordinaterna för punkten **P** i figuren. (2/0/0)
Svara med 3 decimalers noggrannhet! Endast svar krävs!



"Zoom – Ztrig" och intersect:
$P = (-4,342 ; -1,086)$

28. Funktionen $f(x) = 3\cos(2x) - 5\sin(2x)$, där x anges i grader,
kan skrivas om på formen $f(x) = A\sin(2x + v)$

Bestäm värdet på talen A och v. *Svara med 3 decimaler* (2/0/0)

$A = \sqrt{3^2 + 5^2} = 5,831$

$v = \tan^{-1}\left(\frac{3}{-5}\right) = -30,964°$

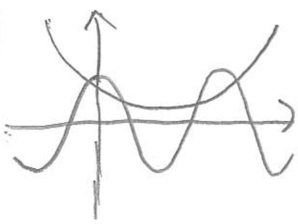
29. Låt $f(x) = 0,5x^2 - 1,5x + 1,7$ och $g(x) = 2,5\cos(2,2x)$

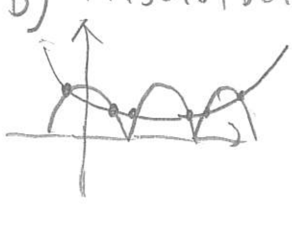
Ekvationen $f(x) = g(x)$, där x anges i radianer, har flera lösningar där samtliga ligger i intervallet $-1 < x < 5$

a) Bestäm antalet lösningar som finns till ekvationen. (1/0/0)

b) Catrin påstår att antalet lösningar fördubblas om man istället löser ekvationen $|f(x)| = |g(x)|$.

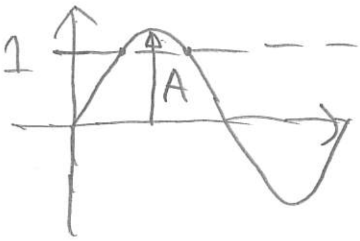
Undersök om Catrin har rätt. (1/1/0)

a)  $\Rightarrow$ 4 skärningspunkter $\boxed{4 \text{ lösningar}}$

b) Absolutbeloppas fås  $\Rightarrow$ 6 lösningar
Ej dubbelt så många

30. Utgå från ekvationen $A\sin(2x) = 1$.

Undersök hur antalet lösningar i intervallet $0° < x < 180°$ varierar med olika värden på A (1/1/1)



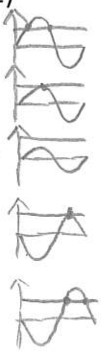
Om $A > 1 \Rightarrow 2$ lösningar

Om $A = 1 \Rightarrow 1$ lösning

Om $-1 < A < 1 \Rightarrow$ Inga lösningar

Om $A = -1 \Rightarrow 1$ lösning

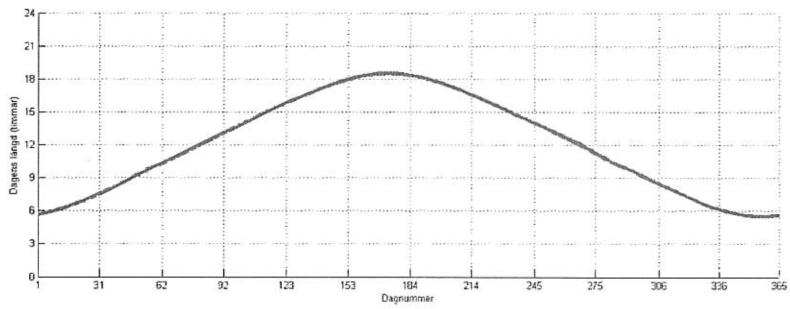
Om $A < -1 \Rightarrow 2$ lösningar



31. Under året varierar dagslängden olika vid olika delar av Sverige. Enligt statistik från SMHI kan dagens längd i Svealand antas följa den förenklade modellen

$y = 6{,}17\sin(0{,}017x - 1{,}29) + 11{,}87$

y anger dagens längd i timmar.
x anger dagens nummer räknat från årets början. (se tabell nedan)



Månad	x -värden
Januari	1 till 31
Februari	32 till 59
Mars	60 till 90
April	91 till 120
Maj	121 till 151
Juni	152 till 181
Juli	182 till 212
Augusti	213 till 243
September	244 till 273
Oktober	274 till 304
November	305 till 334
December	335 till 365

Källa: SMHI

a) Hur lång är dagslängden i Sveland den 1:a Februari, enligt modellen? (1/0/0)

b) Hur stor är skillnaden i dagslängd mellan kortaste och längsta dagen? (0/1/0)

c) Vad säger siffran *11,87* i modellen om dagslängden i Svealand? (0/2/0)

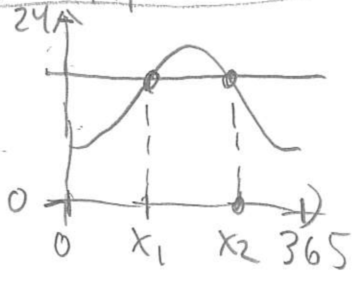
d) Lös olikheten $y > 15$ och tolka resultatet. (0/2/1)

a) $y(32) = 7{,}68 \Rightarrow 7{,}7$ h

b) $2 \cdot A = 2 \cdot 6{,}17 = 12{,}34$ h

c) "11,87" anger förskjutningen i y-led, som innebär årsmedelvärdet av dagslängden, dvs i genomsnitt är det 11,87 h.

d) Rita upp $Y2 = 15$



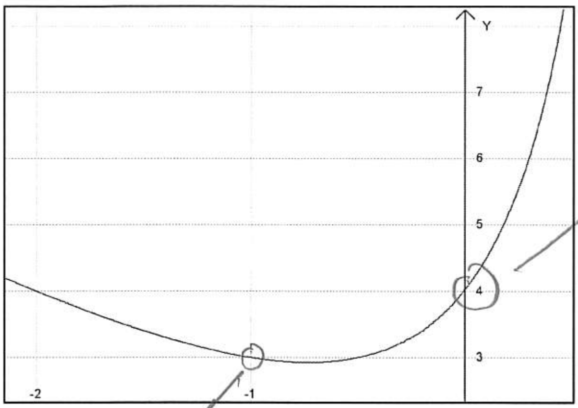
och använd intersect

$x_1 = 107$

$x_2 = 229$ $\Rightarrow$

Mellan mitten av april och mitten av augusti är dagslängden längre än 15 h

32. Delar av grafen för en funktion på formen $\frac{4x+8}{A+Bx} + Cx$ visas nedan.
Funktionen har två asymptoter varav en är en lodrät asymptot, $x = 1$
Bestäm funktionens andra asymptot (0/2/1)



Om x = 0 ska svaret bli 4

$\Rightarrow \frac{4 \cdot 0 + 8}{A + B \cdot 0} + C \cdot 0 = 4$

$\frac{8}{A} = 4 \Rightarrow A = 2$

Lodrät asymptot vid $x = 1$ $\Rightarrow 2 + B \cdot 1 = 0$
$B = -2$

$\frac{4 \cdot (-1) + 8}{2 + (-2) \cdot (-1)} + C \cdot (-1) = 3$

$\frac{4}{4} - C = 3 \Rightarrow C = -2$

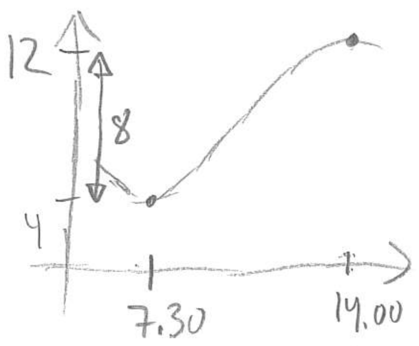
$\frac{4x+8}{2-2x} - 2x \Rightarrow$ asymp.

$\boxed{-2 - 2x = y}$

33. Lös uppgiften ifrån ett prov på Umeå universitetets Tekniskt basår nedan: (0/1/3)

I ett hamninlopp, där ebb och flod förekommer, ligger en sandbank 4,0 m under lågvattennivån. En viss dag, med lugnt och vackert väder, inträffar lågvatten klockan 7.30 och nästa högvatten kl 14.00. Maximala nivåskillnaden mellan ebb och flod är 8,0 m. Vid vilket klockslag kan fartyget M/S Johanna av Umeå med 11,0 m djupgående tidigast lämna hamnen? Anta att tidvattnets rörelse kan beskrivas en sinuskurva

Rita upp den givna infon:



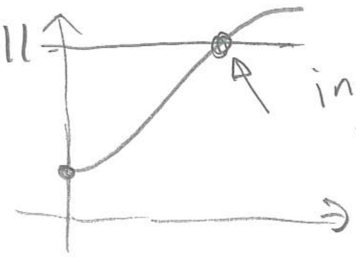
$\Rightarrow$ A = 4
B = 8

6,5 h $\Rightarrow$ P = 13h $\Rightarrow k = \frac{2\pi}{13}$

Lös ekv:

$-4 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{13}x\right) + 8 = 11$

t.ex grafiskt



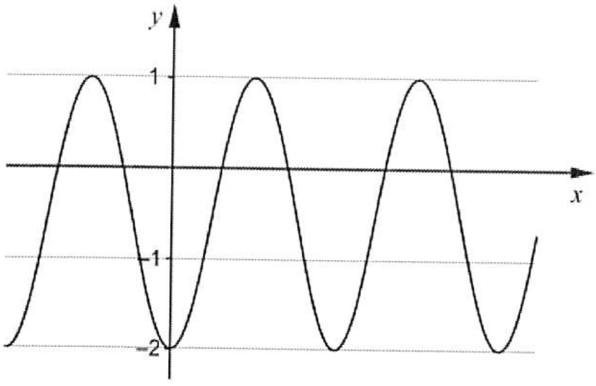
intersect x = 5

"Efter 5 h, dvs kl. 12.30"

34. Lös uppgiften ifrån det gamla nationella provet nedan.

I Lisas matematikbok finns följande uppgift:

Figuren visar kurvan $y = A\sin^2 x + B$
Bestäm konstanterna A och B.



Lisa löser uppgiften så här:

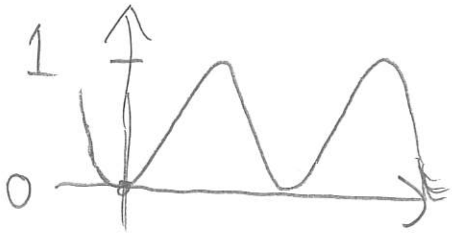
$$A = \frac{1-(-2)}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

$$B = \frac{1+(-2)}{2} = -\frac{1}{2} = -0{,}5$$

Svar: $A = 1{,}5$ och $B = -0{,}5$

Lisas lösning är inte korrekt. Hjälp Lisa att lösa uppgiften korrekt. (0/0/2)

Lisa har utgått från att det är en sinuskurva som flyttats, men det är en $(\text{sinus})^2$. Grundutseendet för en sån är:



Figuren visar en sån graf nedflyttad 2 steg, med amplituden 3

dvs $B = -2$

$A = 3$